共立講座 現代の数学 19

ノルム環

和田淳蔵著

共立出版株式会社

ノルム環

早稲田大学教授・理学博士
和田淳蔵
著

共立出版株式会社

共立講座 現代の数学

序

ノルム環の発祥地は日本であるともいえる．というのはノルム環は南雲道夫先生の "Lineare metrische Ringe" (1936 年) と吉田耕作先生の "Metrical complete ring" (1936 年) に端を発しているからである．この両先生以来，日本では幾多の数学者がこのノルム環，Banach 環の理論の発展に寄与された．さてノルム環 (Banach 環) とはノルム空間 (Banach 空間) であって，かつ同時に環をなしており，その乗法 xy が $\|xy\| \leqq \|x\| \cdot \|y\|$ を満たすときにいう (ノルム環は Banach 環と同じ意味に用いられることもあるが，ここではノルム環には完備性を入れないで用いる)．1941 年，I. Gelfand は単位元をもつ可換 Banach 環の構造および表現に関する論文を発表し，その後主としてソ連の学者によって連続関数環や，可換位相群の群環，Fourier 解析などへ応用された．また非可換ノルム環に関しては，古くから von Neumann (1929 年) によって Hilbert 空間の有界な線型作用素の作るノルム環が考えられ，その後，抽象的な非可換ノルム環の研究が盛んに行なわれた．その一つが B^*-環の研究である．また上に述べた von Neumann の研究の後をついで現在も作用素環 (von Neumann 環，W^*-環ともいわれる) などの研究が盛んに行なわれている．そしてこれら全体を通じて，わが国で行なわれた研究が非常に貢献している．このようにわれわれにとって密接な関係をもっている "ノルム環" であるが，それに関する邦書はあまり多くはない．ところでどうしたわけか，これらの種々の研究にあまり関係のない私がその 1 冊を書くことになってしまった．しかし全然関係がないといってしまっては語弊がある．というのは私自身，可換ノルム環の一部である関数環 (Function algebra) に興味をもっていて最近非常な発展を見せているこの分野の紹介をして見たいという希望をもっていた．そこへたまたま共立出版のこのシリーズの出版の話が出たので，関数環のことが頭に浮び引き受けることにした．ところが関数環のことを書くためには，可換ノルム環について述べなければならず，また可換ノルム環のことを

書くためには一般のノルム環の様子にも言及しなければならない．そういうわけで範囲が段々に拡大されていく．そのような尨大な内容を200ページあまりにまとめるということは，非力な私にとっては非常な難事である．結局どこかに重点をおかざるを得ないので，それを関数環にとることにした．その結果，作用素環の理論やノルム環の位相群の理論への応用などは割愛しなければならなくなったのは，私自身それらに不案内なせいでもある．

さて関数環のことについては，第4章，第5章でくわしく述べたつもりであるが，関数環とは compact Hausdorff 空間Xの上の複素値連続関数全体の環を $C(X)$ としたとき，$C(X)$の閉部分(多元)環で，関数1を含みかつXの任意の二点を分離するものをいう．場合によっては関数環として，Xを単に1つの集合とし，Xの上の（もちろん連続性を考えない）関数からなる環を考えることもあるが，本書では大体の場合 compact Hausdorff 空間の上の連続関数の環に限って考える．このようにして定義された関数環の研究の真の目的は，関数論における諸定理を位相解析的な方法によって，どのようにして一般化し，また綜合的におのおののものの間に関連性をつけるかを考えることにあると思う．可換ノルム環の一部として，以前から関数論との関連をもっていた関数環ではあるが，1950年ごろからますます関数論との関連性を深め，現在では可換ノルム環の一部としてではなく，それ自身独立した感がある．とくにXをn次元複素空間 $\mathbf{C}^n$ の中の集合におくことにより，多変数関数論との関連性を探ることが行なわれつつあるが，本書ではそこまで触れることはできなかった．関数環には比較的抽象的な一般論と，他のものへの応用がある．一般論といっても，その根底をなすものはやはり関数論における諸性質である．大別して第4章では一般論，第5章では応用面を述べたつもりである．しかしここに挙げた諸定理は，ごく基礎的な範囲のもので，関数環の理論の一端に触れたに過ぎない．最近の結果のいくつかについては第4，第5章の各節の終わりの「注意」または巻末の「補遺」のところで説明しておいた．この第4，5章はこれだけを単独で読むこともできる．

ところでこの共立出版のシリーズは大学学部の高学年および大学院の学生を対象にして編集されている．本書も大体それに合わせて書いたものであるが，予備知識として多少の「位相解析」の定理が必要となる．本書の初めにこれら

の定理を証明しておくべきであったかも知れないが，頁数などの都合上，よく用いられるいくつかの定理を列挙し，その証明が記載されている書物をあげるにとどめた．また「補遺」の中にも，いくつかの参考になる書物を挙げておいた．最近「位相解析」または「関数解析」の非常によい書物が多く出ているので，それらにより勉強されたい．

最後に申し述べたいことは，本書はノルム環について勉強しようという読者にノルム環とはどのようなものかを知らせ，それに興味をもたせる目的で書かれた，いわば啓蒙書のようなものである．1人でも2人でもこれによって興味をもつ人が出てくれば本書の目的は達せられたことになる．そういう方々には巻末にあげた書物や論文を読まれることをおすすめしたい．

本書の執筆をすすめて下さった一松先生始め編集委員の方々，出版に際しいろいろ御世話下さった共立出版株式会社の皆さんに感謝の意を表したい．

昭和 44 年 4 月

著　者

目　　　次

第1章　基 礎 概 念

第2章　Banach 環の構造

第3章 可換 Banach 環

第4章 関 数 環（1）

第5章　関　数　環（2）

第6章　*-環　概　論

第 1 章　基　礎　概　念

第1章ではノルム環の理論における基礎概念について述べる．この章の定義と定理はノルム環の意味を明らかにするとともに，あとの章の理論のための準備となる．1·1 節ではノルム空間，ノルム環の定義，単位元の添加，実環の複素環拡大．1·2 節では正則元，擬正則元などについて，1·3 節ではスペクトルについて述べられる．ノルム環の元のスペクトルは非常に重要な概念で，この節で証明されるスペクトルに関する諸定理は各章を通じて用いられる．また 1·1 節から 1·3 節までにでてくる概念は互いに関連性をもっている．最後に 1·4 節では，ノルム環が多元体になった場合，複素環ではそれが複素数体と同型となることが証明される．実ノルム多元体についても論じられる．

1·1　ノルム空間，ノルム環

A.　ノルム空間

$x, y, z, \cdots$ を元とする集合 X がつぎの条件を満たすときノルム空間といわれる．

1)　A は実または複素線型空間である．

2)　任意の $x \in X$ に対して，つぎを満たすノルム $\|x\|$ が定義されている．$x, y \in A$, α をスカラーとして

（i）　$\|x\| \geqq 0$，かつ $\|x\|=0$ は $x=0$ のときに限る

（ii）　$\|x+y\| \leqq \|x\|+\|y\|$

（iii）　$\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$

X の2点 x, y に対して $\rho(x, y)=\|x-y\|$ のように距離関数 ρ を定義すれば，これにより X は距離空間となる．もし X がこの距離 ρ に関して完備ならば X は Banach 空間といわれる．

各章を通じて線型空間，ノルム空間および Banach 空間に関する種々の定理が使われるが，その中のおもなものを証明なしに列挙しておこう．

a.　Hahn-Banach の定理　X を実線型空間とし，$p(x)$ をその上で定義された実数値関数とし，つぎを満たすとする．

$$p(x+y) \leqq p(x)+p(y) \qquad (x, y \in X),$$
$$p(\alpha x)=\alpha p(x) \qquad (x \in X,\ \alpha \geqq 0).$$

いまYをXの部分空間とし，$f(x)$ をYの上で定義された実数値線型汎関数とし

$$f(x) \leqq p(x) \qquad (x \in Y)$$

を満たしているとする．そのときfはXの上の実数値線型汎関数Fに拡張できる．すなわち

$$F(x)=f(x) \qquad (x \in Y)$$

でかつ

$$F(x) \leqq p(x) \qquad (x \in X)$$

となるFが存在する．

この定理の応用として，つぎの定理が証明できる．

Xをノルム空間，Yをその部分空間とする．そのときYの上の任意の有界線型汎関数 $f(x)$ はノルムを変えずに，Xの上の有界線型汎関数 $F(x)$ に拡張できる．すなわち，

$$F(x)=f(x) \qquad (x \in Y)$$
$$\|F\|=\|f\|$$

（巻末文献①の p. 160，②の p. 190 参照）

b.　閉グラフ定理　X, Y を Banach 空間としたとき，XからYへの任意の閉線型作用素 T は有界（連続）となる．ここで T が閉作用素であるとは，Xにおいて点列 $\{x_n\}$ がxに収束し，Yにおいて $\{Tx_n\}$ がyに収束したとき $Tx=y$ となることをいう（巻末文献③の p. 193，②の p. 175 参照）．

c.　開写像定理　X, Y を Banach 空間とし，S をXの 0 を中心とした単位球とする．TをXからYの**上への**任意の有界線型作用素とすれば，$T(S)$ はYの 0 を中心としたある球をふくむ．したがって，上の条件のほかにTが一対一写像とすれば T^{-1} も有界（連続）となる（巻末文献②の p. 172～173 参照）．

d.　共鳴定理　Xを Banach 空間，Yをノルム空間とする．XからYへの有界線型作用素の族 $\{T_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ がXの各点で有界ならば，すなわち任意の $x \in X$ について，$\sup\{\|T_\lambda x\| : \lambda \in \Lambda\} < \infty$ ならば，それらは一様に有界である：

$$\sup\{\|T_\lambda\| : \lambda\in\Lambda\}<\infty$$

(巻末文献①の p. 172, ②の p. 177 参照)

e. ノルム空間 X の共役空間 X' の部分空間 Y が*-弱閉であるための必十条件は，Y と X' の単位球との共通集合が*-弱閉となることである．ここで*-弱閉とは*-弱位相で閉集合となることである（巻末文献②の p. 212 参照）.

f. Krein-Milman の定理 Xを局所凸位相線型空間とし，FをXのコンパクト凸集合とする．EをFの端点すべての集合とするとき，Eの閉凸被はFと一致する．ここでxがFの端点 (extreme point) であるとは，$x\in F$ でかつ，$x=(1/2)(y+z)$ $(x, y\in F)$ となれば $x=y=z$ となることをいう（巻末文献④の p. 440, ⑤ p. 707 を参照）.

g. Xを局所凸位相線型空間とし，F を X の閉凸集合で，$F\not\ni x_0$ とする．そのときXの上の連続実線型汎関数 $f(x)$ が存在して

$$\sup_{x\in F} f(x)<f(x_0)$$

(巻末文献②, ④を参照)

h. Riesz-Kakutani の定理 Ω をコンパクト Hausdorff 空間とし，$C(\Omega)$ を Ω の上の実数値連続関数全体からなる Banach 空間とする（ノルムは $\|f\|=\sup\{|f(x)| : x\in\Omega\}$）．そのとき $C(\Omega)$ の上の任意の有界線型作用素Tはつぎのように表わされる.

$$T(f)=\int_\Omega f(x)\mu(dx) \qquad (f\in C(\Omega))$$

ここでμはΩの Baire 集合を可測とするような正則な Carathéodory 外測度の差であるような一般測定である．Tが正値であれば，すなわち $C(\Omega)\ni f$, $f\geqq 0$ に対して $T(f)\geqq 0$ となれば，μ は正則な Carathéodory 外測度で，$\|T\|=\mu(\Omega)$ となる（巻末文献③の p. 43～48 参照）.

i. X, Y を Banach 空間として，その積空間 $X\times Y$ の上の双一次形式 $B(x, y)$ を考える．すなわち，yを固定すればxについて線型汎関数であり，xを固定すればyについて線型汎関数であるようなものとする．もし $B(x, y)$ が分離的連続であれば，それは連続となる．すなわち $|B(x, y)|\leqq\alpha\|x\|\,\|y\|$ (α : 定数) となる．ここで分離的連続とは，yを固定すればxで連続，xを固定すればyで連続となることである（巻末文献④の p. 70，⑤を参照）.

B. ノルム環

ノルム空間 A がさらにつぎの条件を満たすとき**ノルム環**といわれる．

1) A は環である．線型空間としての元の和 $x+y$ のほかに，積 xy が定義され環をなしている．

2) $||xy|| \leqq ||x||\ ||y|| \quad (x, y \in A)$

3) A が単位元 1 をもつときは $||1||=1$

ノルム環 A が $\rho(x,y)=||x-y||$ によって完備になれば，A は **Banach 環**といわれる．ここでとくにスカラー α を実数と限るときは**実ノルム環**，複素数であることを明示したいときは**複素ノルム環**という．

例 1 環 $C(T)$ 　 T を位相空間とするとき，T の上の有界複素値連続関数 $f(x)$ の全体を $C(T)$ とおく．$C(T)$ における和，スカラー α をかけること，および積をおのおの $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$，$(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$，$(fg)(x)=f(x)g(x)$，また f のノルムを $||f||=\sup\{|f(x)|;\ x\in T\}$ で定義すれば $C(T)$ は Banach 環となる．

例 2 環 $\mathfrak{B}(X)$ 　 X を Banach 空間とし，X の上の有界線型作用素の全体を $\mathfrak{B}(X)$ で表わす．$\mathfrak{B}(X)$ における和，スカラー α との積，元の間の積，およびノルムをおのおのつぎのように定義する．$(A+B)x=Ax+Bx$，$(\alpha A)x=\alpha(Ax)$，$(AB)x=A(Bx)$，$||A||=\sup\{||Ax||;\ ||x||\leqq 1\}$．そのとき $\mathfrak{B}(X)$ は Banach 環となる．

例 3 ディスク環 (disk algebra) 　複素平面上の単位円上で定義された複素値連続関数 $f(x)$ で，それを単位開円板に連続的に拡張したものが，そこで解析的 (analytic) にできるような $f(x)$ の集合 A を考える．これに例 1 と同じような和，スカラーとの積，元の積，ノルムを入れることにより Banach 環となる．この A をディスク環とよぶ．第 4 章，第 5 章での理論のなかでこれが非常に重要な役割を演ずる．

例 4 環 l^1 　 $||x||=\sum_{-\infty}^{\infty}|x_n|<\infty$ となるような複素数の列 $x=\{x_n;\ n=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$ の全体を l^1 とする．$x=\{x_n\}$，$y=\{y_n\}$ を l^1 の元としたとき，$x+y=\{x_n+y_n\}$，$\alpha x=\{\alpha x_n\}$ そして $xy=\{z_n\}$，$z_n=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_{n-k}y_k$ で l^1 の元の和，スカラーとの積，元の積を定義し，また上のようにノルム $||x||$ を定義したとき l^1 は Banach 環となる．これを convolution algebra と

もいう．

C． 単位元の添加

ノルム環Aは単位元1をもつことも，もたないこともあるが，もたない場合はそれを添加することができる．すなわちAをふくむ単位元をもつノルム環A_1を作ることができる．A_1の作り方はつぎのとおりである．Aの任意の元xとスカラーαで対(x,α)を作り，その全体をA_1とする．そのA_1が求めるものであることを示す．A_1の二つの元(x,α)，(y,β)に対して$(x,\alpha)+(y,\beta)=(x+y,\alpha+\beta)$，$\gamma(x,\alpha)=(\gamma x,\gamma\alpha)$ （γはスカラー） および $(x,\alpha)(y,\beta)=(\alpha y+\beta x+xy,\alpha\beta)$と定義し，また$(x,\alpha)$のノルムを$||(x,\alpha)||=||x||+|\alpha|$ときめる．$(0,1)$が$A_1$の単位元であることは明らか．ここで$A_1$の元$(x,0)$と$A$の元$x$とを同一視すれば，ノルムの意味をふくめて，$A_1$は$A$をふくむものと考えられる．$(x,\alpha)$を単に$\alpha+x$と書くこともある．

D． 実ノルム環の複素ノルム環拡大

ここでは任意の実ノルム環は適当な複素ノルム環の中にはめこまれる（embeded）ことを示す．Banach 環の大部分の理論は複素環の場合になされているが，実ノルム環の場合は，複素ノルム環の中へはめこむことによって，その研究が複素環の場合に帰着されることが多い．

Aを任意の実ノルム環とする．そのときA_cをAの元x, yの対(x, y)の全体とする．A_cの元の間の加法および乗法を$(x_1, y_1)+(x_2, y_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2)$，複素数$\alpha+\beta i$に対して$(\alpha+\beta i)(x, y)=(\alpha x-\beta y, \alpha y+\beta x)$また$(x_1, y_1)(x_2, y_2)=(x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+y_1x_2)$のように定義する．この定義は直観的には$x,y\in A$で$x+iy$の全体を考えているわけである．さて上の定義で$A_c$は複素環となり，$A$を$A_c$の中の$\{(x,0)\,;\,x\in A\}$と同一視すれば，$A_c$は$A$をふくむことになる．ここで残っているのはノルムの問題である．いま単位元の添加の場合のように$||(x, y)||=||x||+||y||$とすれば，$||(\alpha+\beta i)(x, y)||=||(\alpha x-\beta y, \alpha y+\beta x)||=||\alpha x-\beta y||+||\alpha y+\beta x||$．これは一般には$|\alpha+\beta i|\ ||(x, y)||=(\alpha^2+\beta^2)^{1/2}(||x||+||y||)$とはならない．それで$A_c$の元のノルムをつぎのように定義する．まず$|(x,y)|=||x||+||y||$とおき，

$$||(x, y)||=\frac{1}{\sqrt{2}}\sup_{\theta}|e^{i\theta}\cdot(x, y)|$$

そのときこのノルムをもった A_c は複素ノルム環となることは容易に確かめられる.

定理 1·1 A を任意の実ノルム環とする. A_c を上に定義された複素ノルム環とすれば, つぎが成立する.

(i) A_c は A を等長的 (isometric) にふくむ複素ノルム環である. すなわち $||(x,0)||=||x||$ $(x\in A)$

(ii) A が Banach 環なら A_c も Banach 環である.

証明 (i) $||(x,0)||=1/\sqrt{2}\sup\{|(\alpha x,\beta x)|:\alpha^2+\beta^2=1\}=||x||$ となり明らか. (ii) $||(x,y)||=1/\sqrt{2}\sup_\theta|e^{i\theta}(x,y)|=1/\sqrt{2}\sup_\theta\{||x\cos\theta-y\sin\theta||+||x\sin\theta+y\cos\theta||\}\leqq 1/\sqrt{2}\sup_\theta\{(||x||+||y||)\cdot(|\cos\theta|+|\sin\theta|)\}=||x||+||y||=|(x,y)|\leqq\sqrt{2}||(x,y)||$. すなわち $||(x,y)||\leqq|(x,y)|\leqq\sqrt{2}||(x,y)||$ で二つのノルム $|(x,y)|$ と $||(x,y)||$ は同値となり, (ii) は容易に証明される.

qed

つぎの定理は後で必要となる.

定理 1·2 A は複素環で, ノルム $|x|$ で実ノルム環になっているものとする. また写像 $x\to ix$ はノルム $|x|$ で連続と仮定する. そのとき A の中に新しいノルム $||x||$ が存在して, それで A は複素ノルム環となり, かつノルム $|x|$ と同値である.

証明 $||x||=\sup_\theta\{|e^{i\theta}x|\}$ と定義すれば, $||x||$ で A は複素ノルム環となることは明らかだが, ただ A が単位元 1 をもつときは $||1||=1$ となるかどうかはわからないが, これは容易に処理できる*). $||x||$ が $|x|$ と同値なることは, $x\to ix$ が連続なるゆえ, 定数 $c>0$ で $|ix|\leqq c|x|$ $(x\in A)$. ゆえに

$$|x|\leqq||x||=\sup_\theta\{|x\cos\theta+ix\sin\theta|\}\leqq(1+c)|x|$$

これは二つのノルムが同値となることを示す. *qed*

1·2 正則元, 擬正則元, 位相的零因子

A. 正 則 元

A を単位元をもつノルム環とする. A の一つの元 x が 左 (右) 正則 (left

*) $||1||\neq 1$ なら $|||x|||=\sup\{||xy||/||y||,\ y\neq 0,\ y\in A\}$ で新しくノルムを定めれば $|||x|||$ は $||x||$ と同値で $|||1|||=1$ となる.

(right) regular) といわれるのは A の中に元 y が存在して $yx=1$ ($xy=1$) となるときである．この元 y を x の左（右）**逆元** (left (right) inverse) という．左正則でかつ右正則である元を**正則元** (regular element) という．この場合すぐわかるように，その左逆元と右逆元は一致するからそれを x の逆元 (inverse) x^{-1} と書くことにする．左（右）正則元の全体を $G^l(G^r)$ で表わす．そのとき正則元の全体は $G^l\cap G^r$ で表わされる．それを G とおく．すなわち $G=G^l\cap G^r$. G は A の積に対して一つの群をなすことは明らかである．左（右）正則でない元を**左（右）非正則元** (left (right) singular element) ということにする．左（右）非正則元の全体を $S^l(S^r)$ と書き，左非正則であるか右非正則である元の全体を S と書く．$S=S^l\cup S^r$. A が実環のとき A の正則元は A の複素環拡大 A_c でも正則元になっていることは明らかである．

さて A をノルム環（単位元をもつとは限らない）とし，A の元 x に対して $r(x)=\inf_n\|x^n\|^{1/n}$ で $r(x)$ を定義する．もちろん $\|x^n\|\leqq\|x\|^n$ であるから $r(x)\leqq\|x\|$ となるが，$r(x)$ はつぎを満たす．

定理 1・3　上で定義された $r(x)$ はつぎを満たす．

(i)　$r(x)=\lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{1/n}$

(ii)　$r(\alpha x)=|\alpha|r(x)$　(α はスカラー)

(iii)　$r(xy)=r(yx)$, $r(x^k)=r(x)^k$ $(k=1,2,\cdots)$

(iv)　x, y が可換であれば $r(xy)\leqq r(x)r(y)$ でかつ，
$r(x+y)\leqq r(x)+r(y)$.

証明　まず $\gamma=r(x)=\inf\|x^n\|^{1/n}$ とおくとき，それは $\lim\|x^n\|^{1/n}$ と等しいことを示す．$\varepsilon>0$ に対してある m で $\|x^m\|^{1/m}\leqq\gamma+\varepsilon$. 任意の n に対して $n=pm+q$ $(0\leqq q\leqq m-1)$ とおけば，

$$\|x^n\|^{1/n}\leqq\|x^m\|^{p/n}\|x\|^{q/n}\leqq(\gamma+\varepsilon)^{pm/n}\|x\|^{q/n}$$

ここで $n\to\infty$ とすれば $pm/n\to1$ でかつ $q/n\to0$. それゆえ $\overline{\lim}_{n\to\infty}\|x^n\|^{1/n}\leqq\gamma+\varepsilon$ となる．$\varepsilon>0$ は任意であるから $\gamma=\lim\|x^n\|^{1/n}$ となる．(ii), (iii) および (iv) の前半はほとんど明らか．(iv) の後半を証明する．$xy=yx$ とする．正数 α,β を $\alpha>r(x)$, $\beta>r(y)$ となる任意の二つの数とし，$a=\alpha^{-1}x$, $b=\beta^{-1}y$ とおく．そのとき

$$||(x+y)^n||^{1/n}=||\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}||^{1/n}$$
$$\leqq\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^k\beta^{n-k}||a^k||\ ||b^{n-k}||\right]^{1/n}$$

おのおのの n に対して $\max\{||a^k||\ ||b^{n-k}||,\ 0\leqq k\leqq n\}$ なる値をとる $||a^{n'}||\ ||b^{n''}||$ $(n'+n''=n)$ が存在する．すなわち

$$||a^{n'}||\ ||b^{n''}||=\max\{||a^k||\ ||b^{n-k}||;\ 0\leqq k\leqq n\}$$

そのとき

$$r(x+y)\leqq(\alpha+\beta)||a^{n'}||^{1/n}||b^{n''}||^{1/n}$$

ここで自然数列 $\{n_m\}$ を適当に選び $c=\lim_{m\to\infty}n'_m/n_m$ が存在するようにする．これは $0\leqq n'/n\leqq 1$ であることから明らかに存在し，その結果 $0\leqq c\leqq 1$ である．$\lim_{m\to\infty}n''_m/n_m=1-c$.

（i） $c\neq 0$ なら $n'_m\to\infty$ となり，

$$\lim_{m\to\infty}||a^{n'_m}||^{1/n_m}=\lim_{m\to\infty}(||a^{n'_m}||^{1/n'_m})^{n'_m/n_m}=r(a)^c\leqq 1$$

（ii） $c=0$ なら

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}||a^{n'_m}||^{1/n_m}\leqq\lim_{m\to\infty}||a||^{n'_m/n_m}\leqq 1$$

どちらの場合でも $\overline{\lim}||a^{n'_m}||^{1/n_m}\leqq 1$. 同様にして $\overline{\lim}||b^{n''_m}||^{1/n_m}\leqq 1$. これから $r(x+y)\leqq\alpha+\beta$ となる．α, β は $\alpha>r(x)$, $\beta>r(y)$ となる任意の正数なるゆえ

$$r(x+y)\leqq r(x)+r(y) \qquad \text{qed}$$

上の定理からもしAが可換ならば $r(x)$ はAの半ノルム (pseudo-norm) となる．

$r(x)$ と $||x||$ が一致するのは，つぎのような場合に限る．

定理 1·4 ノルム環Aにおいて $r(x)$ と $||x||$ が一致するための必十条件はAのすべての元 x に対して $||x^2||=||x||^2$ となることである．

証明 $r(x)=||x||$ なら $||x^2||=||x||^2$（前定理 (iii)）. 逆にすべての x で $||x^2||=||x||^2$ なら，繰り返しによって $||x^{2^k}||=||x||^{2^k}$.

それゆえ
$$r(x)=\lim_{k\to\infty}||x^{2^k}||^{1/2^k}=||x|| \qquad \text{qed}$$

Aを単位元1をもつ Banach 環とする．そのとき A の正則元と $r(x)$ の関

係はつぎのようである.

定理 1·5 Aを1をもつ Banach 環とする. そのとき $r(1-a)<1$ となるAの元aはすべて正則であり，その逆元はつぎのように表わされる.

$$a^{-1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(1-a)^n$$

証明 $r(1-a)<1$ であるから $\lim_{n\to\infty}||(1-a)^n||^{1/n}<1$.

ゆえに自然数kと正数$\eta(<1)$が存在して $||(1-a)^n||^{1/n}\leqq\eta$ $(n\geqq k)$. このことから

$$||\sum_{n=l}^{\infty}(1-a)^n||\leqq\sum_{n=l}^{\infty}||(1-a)^n||\leqq\sum_{n=l}^{\infty}\eta^n=\eta^l/(1-\eta)\to 0 \quad (l\to\infty)$$

Aは完備なるゆえ $1+\sum_{n=1}^{\infty}(1-a)^n$ はAの元となり，それを a^{-1} とおけば，

$$aa^{-1}=a+\sum_{n=1}^{\infty}a(1-a)^n=a+\sum_{n=1}^{\infty}(a-1)(1-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}(1-a)^n$$

$$=a-\sum_{n=1}^{\infty}(1-a)^{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}(1-a)^n=a+(1-a)=1.$$

同様に $a^{-1}a=1$. ゆえにaは正則元である. *qed*

系 1·6 $||1-a||<1$ ならaは正則である.

この系を用いるとつぎの定理が証明できる.

定理 1·7 Aを Banach 環，aを左（右）正則元でbをその左（右）逆元とする. そのとき $||a-x||<||b||^{-1}$ となるすべての元xはまた左（右）正則となる. それゆえ G^l, G^r, したがってGも開集合となる.

証明 $||1-bx||=||b(a-x)||\leqq||b||\,||a-x||$ となり，$||a-x||<||b||^{-1}$ なら $||1-bx||<1$. 系 1·6 より bx は正則元である. cをその逆元とすれば $cbx=1$. ゆえにxは左正則元となる. *qed*

定理 1·8 Aを Banach 環とし，$\{a_n\}$ をAの左（右）正則元の列でAの元aに収束するものとする. b_n を a_n の左（右）逆元としたとき，もし $\{b_n\}$ が有界列ならば，aもまた左（右）正則元である.

証明 $1-b_na=b_n(a_n-a)$, $\{b_n\}$ は有界列，すなわち $||b_n||\leqq M$ で $||a_n-a||\to 0$ $(n\to\infty)$ であるから，十分大きなnでは $||1-b_na||<1$. ゆえに b_na は正則元，aは左正則元. *qed*

定理 1·9 Aを単位元1をもつノルム環とする．そのとき写像 $a\to a^{-1}$ はGからGの上への同相写像（homeomorphism）である．

証明 写像 $a\to a^{-1}$ が連続なることを証明すればよい．
$a, a+h\in G$ で $(a+h)^{-1}=a^{-1}+k$ とおく．

$$1=(a^{-1}+k)\,(a+h)=1+a^{-1}h+ka+kh.$$

これから $a^{-1}h+ka+kh=0$ となる．この式に右から a^{-1} をかけて $a^{-1}ha^{-1}+k+kha^{-1}=0$, そして $k=-a^{-1}ha^{-1}-kha^{-1}$. $||k||\leqq||a^{-1}||^2\,||h||+||k||\,||h||\,||a^{-1}||$.
h を $||h||\,||a^{-1}||<1$ となるように選べば，

$$||k||\leqq\frac{||a^{-1}||^2}{1-||h||\,||a^{-1}||}||h||$$

$0<\varepsilon<||a^{-1}||$ となる ε に対して $\delta=(2||a^{-1}||^2)^{-1}\varepsilon$ とおく．そのとき $||h||<\delta$ ならば，$||h||\,||a^{-1}||<\delta||a^{-1}||<1/2$ そして

$$||k||<2||a^{-1}||^2||h||<2||a^{-1}||^2\delta=\varepsilon.$$

これは $a\to a^{-1}$ が同相写像なることを示す． *qed*

B． Banach 環の元に対する指数，対数

これから単位元をもつ Banach 環 A の元に対する指数関数，対数関数を定義する．$A\ni x$ に対してつぎのように定義する．

$$\exp x=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

この級数はすべての x で絶対収束することは明らかであるが，もしxとyとが交換可能なら加法法則が成立する：

$$\exp(x+y)=\exp x\exp y.$$

とくに $\exp(-x)=(\exp x)^{-1}$ であるから $x\to\exp x$ はAから群Gへの一つの写像となる．

また $x\in A$ の対数 $y=\log x$ は $\exp y=x$ の解yとして定義される．ゆえに対数をもつ元は指数関数の値域になければならない．xが対数をもつための必要条件はそれが正則なることは明らかであるが，十分条件は $r(1-x)<1$ となることである．なぜならば，

$$y=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1-x)^n$$

とおけば，この級数は $r(1-x)<1$ なるxでは絶対収束し，それが $\exp y=x$

を満たす解 y になっていることが容易に確かめられる．

定義　群 G の中の単位元をふくむ連結成分を G の**主成分** (principal component) といい G_1 で表わす．

G_1 は G の部分群であることは明らか．なんとなれば，x, $y \in G_1$ としたとき xG_1^{-1} は連結集合で単位元をふくむ．ゆえに $xG_1^{-1} \subset G_1$，これから $xy^{-1} \in G_1$ となる．

定理 1·10　対数をもつ G の元全体を L とする．そのとき L で生成された G の部分群は G_1 と一致する．

証明　$\exp y = x$ とする．$G_x = \{\exp(\alpha y);\ -\infty < \alpha < \infty\}$ とおく．G_x は x をふくむ G のアーベル部分群である．さらに

$$\|\exp(\alpha y) - \exp(\alpha_0 y)\| \leqq \|\exp(\alpha_0 y)\|\ \|\exp(\alpha - \alpha_0)y - 1\|$$
$$\leqq \|\exp(\alpha_0 y)\|\ |\exp(|\alpha - \alpha_0|\ \|y\|) - 1|$$

なるゆえ $\alpha \to \exp(\alpha y)$ なる写像は連続となる．これより G_x は連結となり単位元をふくむゆえ，$x \in G_x \subset G_1$．これは $L \subset G_1$ を示している．その結果 L から生成された G の部分群 G_0 は G_1 にふくまれる．$G_0 = G_1$ なることを証明するのに G_0 は G_1 の中で開かつ閉であることをいえばよい．まず $\{x_n\} \subset G_0$ で x_n が G_1 の元 x に収束すると仮定する．そのとき $x_n^{-1}x \to 1$，そして十分大きな n で $x_n^{-1}x \in L$．なんとなれば $\|1 - x_n^{-1}x\| < 1$ となるからである．$x = x_n(x_n^{-1}x)$ なるゆえ $x \in G_0$ で，G_0 は G_1 の中で閉なることがいえた．つぎに x_0 を G_0 の任意の元とする．$x \in G_1$ を $\|x - x_0\| < \|x_0^{-1}\|^{-1}$ なる任意の元とするとき $\|x_0^{-1}x - 1\| \leqq \|x_0^{-1}\|\ \|x - x_0\| < 1$ なるゆえ $x_0^{-1}x \in L$ で $x \in G_0$ となる．すなわち G_0 は G_1 で開となる．　*qed*

系 1·11　G_1 のすべての元が対数をもつ（すなわち $L = G_1$）ための必十条件は L が群をなすことである．とくに A が可換ならば $L = G_1$ となる．

つぎのものは南雲[1] の定理として知られている．

定理 1·12　A の一つの元が対数をもつための必十条件は，それが G の中の一つの連結アーベル部分群にふくまれることである．

証明　必要性のほうは上の定理の証明の中の G_x を考えればよい．十分性を証明する．それには G のすべての連結アーベル部分群 H が L の中にふくまれることをいえばよい．いま B を H をふくむ A の任意の閉可換部分環とする．

上の系より B における正則元全体の群 G' の主成分 G_1' の任意の元は対数をもつ．ところが H は G' の中の連結部分群であるから，その主成分 G_1' にふくまれる．ゆえに H の任意の元は B の中で対数をもつ．これはまた A の中で対数をもつことを示す．　qed/

C. 擬　正　則　元

環 A が単位元をもたないときは正則元はもちろん定義できない．そのときは A に単位元を添加してできた環 A_1 に関して正則元を考えればよい．この場合は A の元の逆元は A の中にはふくまれず，結局 A の中の議論でなく A_1 の中の議論になってしまう．そこで A の中だけで正則に代わるものを考える．それが擬正則（quasi-regular）という概念である．

いま A の二つの元 x, y の間に新しい演算 $\circ$ をつぎのように定義する．

$$x\circ y = x + y - xy^{*)}.$$

この演算は結合法則を満たし，A の零元を単位元にもつ，すなわち $a\circ 0 = 0\circ a = a$．もし A が単位元 1 をもっているとすれば，つぎのように書ける．

$$(1-x)(1-y) = 1-(x\circ y).$$

注意　上の式は単位元 1 をもたない環においても，しばしば用いられる．右辺と左辺からおのおの 1 を引けば等しくなるわけで，演算 $\circ$ を考える場合は便利な式である．

さて A の元 x が**左（右）擬正則**とは $y\in A$ が存在して $y\circ x=0$ $(x\circ y=0)$ となることである．このとき y を x の**左(右)擬逆元** (left (right) quasi-inverse) という．x が左擬正則で同時に右擬正則であれば，その左擬逆元と右擬逆元は一致するからそれを x° とおく．左(右)擬正則元全体の集合を $G^{lq}(G^{rq})$ とおけば，$G^q = G^{lq}\cap G^{rq}$ の元を**擬正則元** (quasi-regular element) ということにする．

定理 1·13　(i)　すべての x, y に対して $(x\circ y)(1-x) = (1-x)(y\circ x)$.

(ii)　もし $b\circ a=0$ ならすべての x で $(x-b)(1-a) = x\circ a$ となり，$(1-b)(x-a) = b\circ x$ となる．

(iii)　$(\alpha+x)y$ の左（右）擬正則性は $y(\alpha+x)$ の左（右）擬正則性に同等である．

証明　(i),(ii) は明らか．前の注意のとおり，この場合環に単位元の存在

*) 演算 $\circ$ は Kaplansky[2] によって位相環にとり入れられた．そのまえにも Jacobson[3] などに見られる．始めは $x\circ y = x+y+xy$ と定義されていた．

を仮定していない．（ii）の式の中の $(x-b)(1-a)$ は $(x-b)-(x-b)a$ を表わしている．（iii）の証明：$x_1=\alpha+x$ とおく．a を A の任意の元とし，$b=y(a-1)x_1$ とおく．そのとき $(yx_1)\circ b=y((x_1y)\circ a)x_1$，そして $b\circ(yx_1)=y(a\circ(x_1y))x_1$．それゆえ a が x_1y の左（右）擬逆元であれば，b は yx_1 の左（右）擬逆元となる．また上の式で x_1 と y とを交換して考えれば，a が yx_1 の左（右）擬逆元ならば b は x_1y の左（右）擬逆元となる．　*qed*/

前に正則性に対して得られた結果は擬正則の場合にはつぎのようになる．

定理 1·14　Aを Banach 環とするとき，$r(a)<1$ となる $a(\in A)$ は擬正則で，その擬逆元 a° は

$$a^\circ=-\sum_{n=1}^{\infty}a^n$$

証明　$r(a)<1$ かつ，Aが完備であるから，定理 1·5 と同様な方法で $a^\circ=-\sum_{n=1}^{\infty}a^n$ が定義される．

$$a\circ a^\circ=a-\sum_{n=1}^{\infty}a^n+\sum_{n=1}^{\infty}a^{n+1}=0$$

同様に $a^\circ\circ a=0$，すなわち a は擬正則である．　*qed*/

系 1·15　$\|a\|<1$ ならば a は Aの擬正則元である．

定理 1·16　Aを Banach 環，aを左（右）擬正則元で b をその左（右）擬逆元とする．そのとき $\|x-a\|<(1+\|b\|)^{-1}$ となる任意の元 x はまた左（右）擬正則元である．ゆえに G^{lq}, G^{rq} そして G^q は開集合である．

証明　$b\circ x=(1-b)(x-a)$（定理 1·13（ii））なるゆえ $\|b\circ x\|\leqq(1+\|b\|)\|x-a\|$．もし $\|x-a\|<(1+\|b\|)^{-1}$ ならば $\|b\circ x\|<1$．ゆえに $b\circ x$ は擬正則であり，ある c で $c\circ b\circ x=0$．これは x が左擬正則なることを示している．　*qed*/

定理 1·17　Aを Banach 環，$\{a_n\}$ を A の左（右）擬正則元の列で，a に収束するものと仮定する．b_n を a_n の左（右）擬逆元としたとき，もし $\{b_n\}$ が有界列ならば，a もまた左（右）擬正則元である．

証明　$b_n\circ a=(1-b_n)(a-a_n)$ なるゆえ $\|b_n\circ a\|\leqq(1+\|b_n\|)\cdot\|a-a_n\|$．$\{\|b_n\|\}$ は有界で $\|a-a_n\|\to 0$ なるゆえ，十分大きな n では $\|b_n\circ a\|<1$．ゆえに $b_n\circ a$ は擬正則，これは a が左擬正則元なることを示す．　*qed*/

定理 1·18　ノルム環に対して写像 $a\to a^\circ$ は G^q から G^q の上への同相写像

である．

証明 $a, a+h \in G^q$ とし，$(a+h)^\circ = a^\circ + k$ とおく．定理 1·13(ii) での x, b をおのおの $a+h$, a° とおけば，$(1-a^\circ)h = a^\circ \circ (a+h)$. それゆえ $((1-a^\circ)h) \circ (a^\circ + k) = a^\circ$. これを k でくくれば，$(1-h+a^\circ h)k = (1-a^\circ)h(a^\circ - 1)$. $||k|| - (1+||a^\circ||)||h||\,||k|| \leqq (1+||a^\circ||)^2||h||$. もし $(1+||a^\circ||)||h|| < 1$ のように h をとれば，

$$||k|| \leqq \frac{(1+||a^\circ||)^2||h||}{1-(1+||a^\circ||)||h||}$$

$0<\varepsilon<1$ のような任意の ε に対して，$\delta = (1/2)\varepsilon(1+||a^\circ||)^{-2}$ とおく．そのとき $||h|| < \delta$ ならば $||k|| < \varepsilon$ となり，$a \to a^\circ$ は連続となる．ゆえに定理は証明された． *qed*

D．　位相的零因子

Aをノルム環とする．$a \in A$ が**左（右）位相的零因子**（left (right) topological divisor of zero）であるとは，Aの中に $||a_n|| = 1$ であるような点列 $\{a_n\}$ が存在して $aa_n \to 0$　$(a_n a \to 0)$ となることである．左位相的零因子であるか，または右位相的零因子である元を単に**位相的零因子**とよぶ．代数的な意味での零因子*) はもちろん位相的零因子である．Aの左（右）位相的零因子全体の集合を $Z^l(Z^r)$ で表わすことにすれば，$Z = Z^l \cup Z^r$ はAの位相的零因子全体の集合を表わす．つぎに位相的零因子の性質をいくつかあげる．

a． 左（右）位相的零因子は左（右）非正則である．なんとなれば a を左正則として，$ba=1$ とすれば $a_n = baa_n$, ここで $aa_n \to 0$ ならば $a_n \to 0$ となり，a は左位相的零因子でなくなる．

b． 左（右）正則で右（左）非正則な元は右（左）零因子となる．

いま $ba=1$,　$ab \neq 1$ とすれば $1-ab \neq 0$, そして $(1-ab)a = a - a(ba) = 0$ となり，a は右零因子．

c． 非正則元 x が，一つの正則元の列 $\{a_n\}$ の収束点であれば，x は左位相的零因子であり，同時に右位相的零因子である．すなわち $S \cap \bar{G} \subset Z^l \cap Z^r$.

なんとなればこれを証明するのに，$G = G^l \cap G^r$ を考慮に入れれば $S \cap \bar{G}^l \subset Z^r$ と $S \cap \bar{G}^r \subset Z^l$ を証明すればよい．この二つは互いに対称であるから，始め

*) a が左（右）零因子とは，$b \neq 0$ が存在して $ab=0$ $(ba=0)$ となること．

のほうだけを証明すればよい．ところで $S\cap G^l=S^r\cap G^l\subset Z^r$ （上の b）．このことから結局 $S\cap(\bar{G}^l-G^l)\subset Z^r$ を証明すればよいことになる．以下その証明：$S\cap(\bar{G}^l-G^l)\ni a$ とすれば，$a\in S$ でかつ $\{a_n\}\subset G^l$ が存在して $a_n\to a$. a_n の左逆元を b_n とすれば，$b_na_n=1$ となるが，もし $\{b_n\}$ が有界列であれば，定理1・8 より $a\in G^l$ となり不合理．ゆえに $\{b_n\}$ の部分点列 $\{b_{n_i}\}$ をとることにより $\lim_{i=\infty}||b_{n_i}||=\infty$. いま $b_{n_i}/||b_{n_i}||=z_i$ とすれば $z_ia_{n_i}\to 0, a_{n_i}\to a$ かつ $||z_i||=1$ であるから $z_ia\to 0$ となり $a\in Z^r$.

つぎに環Aが単位元をもたないときは，いままで述べてきた位相的零因子と正則元との関係などはもちろん考えることはできない．そこでこの場合，位相的零因子の概念を少こし変えて考える．いま $1-a$ がAの位相的零因子となるとき，すなわち A の中に $||a_n||=1$ となる点列 $\{a_n\}$ が存在して $a_n-aa_n=(1-a)a_n\to 0$ となるとき，そのような a の全体を Z^{lq} で表わす．同様にして Z^{rq} も定義される．さらに $Z^q=Z^{lq}\cup Z^{rq}$ とおく．

上にあげた，Aが単位元をもつときの性質 a, b, c はAが単位元をもたない場合には，つぎのようになる．

d． $Z^{lq}\subset S^{lq}$, $Z^{rq}\subset S^{rq}$.

e． $G^{lq}\cap S^{rq}\subset Z^{rq}$, $G^{rq}\cap S^{lq}\subset Z^{lq}$.

f． $\bar{G}^q\cap S^q\subset Z^{lq}\cap Z^{rq}$.

注意　位相的零因子の概念は Šilov[4] によって導入された．そこでは generalized divisor of zero ということばが用いられている (Gelfand, Raikov and Shilov[5] p. 69 参照)．(c) は Rickart[6] によってえられた．SとGとの関係などのくわしいことは，上述の Rickart の論文，または巻末文献⑥を見られたい．

1・3 ス ペ ク ト ル

この節では Banach 環の理論の中で最も重要な概念の一つであり，応用も広いノルム環の元のスペクトルについて述べる．Aを単位元をもつ複素ノルム環とするとき，Aの元 x のスペクトルとは $\xi-x$ がAの非正則元であるような複素数 ξ の全体の集合として定義する．$\xi\neq 0$ であれば $1-\xi^{-1}x=\xi^{-1}(\xi-x)$ となるから，0 でない ξ が x のスペクトルに入るための必十条件は $\xi^{-1}x$ が擬非正則となることである．また 0 が x のスペクトルに入るための必十条件は x が非正則となることである．これはAが単位元をもつときであるが，上のこと

がらよりAが単位元をもつ，もたないにかかわらず，つぎのように定義する．Aが複素ノルム環のときに考え，実ノルム環の場合は，その複素環拡大 A_c のスペクトルの定義に帰着させる．

定義 Aを複素ノルム環とし，xをAの元とする．xのAに対するスペクトルをつぎのように定義する．$S_x=\{\xi\,;\,\xi$ は0でない複素数で $\xi^{-1}x$ が擬非正則$\}$ とおくとき，Aが単位元をもち，xが正則の場合はxの**スペクトル**を S_x と定義する．その他の場合，x のスペクトルは $S_x\cup(0)$ を表わすものとする*)．またAを実ノルム環としたとき，xのスペクトルはAの複素環拡大 A_c に関するxのスペクトルを表わすものとする．

xのAに関するスペクトルを $\sigma_A(x)$ と表わす．ノルム環Aのことを明記しなくても混乱がおきない場合は単に $\sigma(x)$ と書くことにする．

つぎの定理はノルム環の元のスペクトルは空集合ではなく，かつ Banach 環の場合はそれが空でない有界閉集合であることを証明する．

定理 1·19 (i) x をノルム環 A の任意の元とする．そのとき $r(x)\leqq|\alpha|$ となるような $\sigma(x)$ の元αが存在する．

(ii) Aを Banach 環とする．そのとき A の任意の元xに対して $\sigma(x)$ は複素平面上の空でない有界閉集合で，かつ $\max\{|\xi|\,;\,\xi\in\sigma(x)\}=r(x)$ となる．

証明 (i) 上の実ノルム環のスペクトルの定義から，ノルム環Aは始めから複素ノルム環であると考えてよい．$0\notin\sigma(x)$ なら定義から，A は単位元をもちxは逆元 x^{-1} をもつ．$xx^{-1}=x^{-1}x=1$ で $r(1)=1$ から，定理 1·3 (iv) を用いて $1\leqq r(x)r(x^{-1})$．

それゆえ $r(x)=0$ なら $0\in\sigma(x)$ となり，この場合は定理は証明された．さて $r(x)=\gamma>0$ と仮定する．そのときこの定理が成立しないとすれば，複素平面の部分集合 $\{\zeta\,;\,|\zeta|\geqq\gamma\}$ の上で定義されたベクトル値関数（値はAの中にとる）$f(\zeta)=(\zeta^{-1}x)^\circ$ は連続である．これは定理 1·18 による．さらに $\zeta\to\infty$ となれば $\zeta^{-1}x\to0$ なるゆえ $(\zeta^{-1}x)^\circ\to0$．$\{\zeta\,;\,|\zeta|\geqq\gamma\}$ は局所コンパクトなるゆえ $f(\zeta)$ は一様連続となる．いま複素数ζを $|\zeta|\geqq\gamma$ とし $w_1,w_2,\cdots,w_n$ を 1のn乗根とする．λを任意の複素数とし $\lambda_j=\lambda w_j$ $(j=1,2,\cdots,n)$ とする．そ

*) Aが単位元をもたないときの A の元 x のスペクトルの定義は，Aに単位元を添加してえられた環 A_1 におけるxのスペクトルの定義に等しい．

のとき多項式 $1-\zeta^{-n}\xi^n$ はつぎのように分解される．もちろん $\zeta_j=\zeta w_j$ である．

$$1-\zeta^{-n}\xi^n=(1-\zeta_1^{-1}\zeta)(1-\zeta_2^{-1}\xi)\cdots(1-\zeta_n^{-1}\xi).$$

ここで ξ の代わりに x をおけば $1-\zeta^{-n}x^n=(1-\zeta_1^{-1}x)(1-\zeta_2^{-1}x)\cdots(1-\zeta_n^{-1}x)$. これから

$$\zeta^{-n}x^n=(\zeta_1^{-1}x)\circ(\zeta_2^{-1}x)\circ\cdots\circ(\zeta_n^{-1}x).$$

$|\zeta_i|=|\zeta w_i|=|\zeta|\geqq\gamma$ なるゆえ $\zeta_i^{-1}x$ $(i=1,2,\cdots)$ は擬正則であり，当然 $\zeta^{-n}x^n$ もすべての n に対してまた擬正則となる．つぎに $S_j=-(\zeta_j^{-1}x+\zeta_j^{-2}x^2+\cdots+\zeta_j^{-n+1}x^{n-1})$ とおけば，$\zeta^{-n}x^n=(\zeta_j^{-1}x)\circ S_j$ となり，$\zeta^{-n}x^n$ と $\zeta_j^{-1}x$ は擬正則なるゆえ，この式の右側に $(\zeta^{-n}x^n)^\circ$ を，左側に $(\zeta_j^{-1}x)^\circ$ をおのおの演算 $\circ$ に関して書ければ

$$f(\zeta_j)=(\zeta_j^{-1}x)^\circ=S_j\circ(\zeta^{-n}x^n)^\circ.$$

さて S_j のおのおのの項は $w_j^{-k}\zeta^{-k}x^k$ $(1\leqq k\leqq n-1)$ の形である．それゆえ $S_1+S_2+\cdots+S_n=0$. 上の式を $j=1,2,\cdots,n$ で加えて n でわると

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f(\zeta_j)=(\zeta^{-n}x^n)^\circ.$$

これは $\sum_{i=1}^{n}(a_i\circ b)=\sum_{i=1}^{n}a_i+nb-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)b$ なる等式による．f は一様連続なるゆえ，任意の $\varepsilon>0$ に対して $\gamma<\mu$ なる μ を十分 γ に近くとれば，n に無関係に $\|f(\gamma_j)-f(\mu_j)\|<\varepsilon$ $(j=1,2,\cdots,n)$. 上の式より

$$\|(\gamma^{-n}x^n)^\circ-(\mu^{-n}x^n)^\circ\|\leqq 1/n\sum_{j=1}^{n}\|f(\gamma_j)-f(\mu_j)\|<\varepsilon.$$

一方 $\gamma<\mu$ なるゆえ $\mu^{-n}x^n\to 0$. なんとなれば $r(\mu^{-n}x^n)=\mu^{-n}r(x)^n=(\gamma/\mu)^n\to 0$ $(n\to\infty)$ から $\|\mu^{-n}x^n\|\to 0$ $(n\to\infty)$ がでる．それゆえ $(\mu^{-n}x^n)^\circ\to 0$ $(n\to\infty)$. 上の式で $n\to\infty$ とおけば十分大きな n に対して $\|(\gamma^{-n}x^n)^\circ\|<\varepsilon$. いいかえれば $(\gamma^{-n}x^n)^\circ\to 0$ となり結局 $\gamma^{-n}x^n\to 0$ $(n\to\infty)$. しかしすべての n に対して $\|\gamma^{-n}x^n\|\geqq r(\gamma^{-n}x^n)=1$ なるゆえ不合理．これは $r(x)\leqq|\alpha|$ なる α が $\sigma(x)$ の中にあることを示している．

（ii）（i）より $\sigma(x)$ は空でなく $r(x)\leqq\sup\{|\xi|;\ \xi\in\sigma(x)\}$ であることが確かめられた．それゆえ $\sigma(x)$ が閉集合なることと $\sup\{|\xi|;\ \xi\in\sigma(x)\}\leqq r(x)$ がいえればよい．（i）でも注意したように A は複素ノルム環の場合に考えれば

よい．もし $r(x)<|\xi|$ となるような $\xi\in\sigma(x)$ が存在すると仮定すれば $r(\xi^{-1}x)<1$，かつ定理 1·14 より $\xi^{-1}x$ は擬正則となる．すなわち $\xi\notin\sigma(x)$ となり不合理．つぎに $\sigma(x)$ が閉集合なることは，Banach 環の擬正則元全体の集合 G^q は A の中で開集合となる（定理 1·16）ゆえ連続写像 $\xi\to\xi^{-1}x$ を考えると，$\{\xi\,;\,\xi^{-1}x\in G_q\}$ は複素平面上の開集合となる．その結果 $\sigma(x)$ の余集合から (0) を引いたものが開集合となる．$\sigma(x)\ni(0)$ なら $\sigma(x)$ の余集合が開，したがって $\sigma(x)$ は閉集合である．また $\sigma(x)\not\ni(0)$ なら定義より，A は 1 をもち x は正則．正則元の集合は開集合なるゆえ十分小さな ξ に対して $\xi-x$ は正則，それゆえ $\xi^{-1}x$ は擬正則となりこの場合も $\sigma(x)$ は閉集合となる．*qed*

上の定理の $\max\{|\xi|\,;\,\xi\in\sigma(x)\}$ を x の**スペクトル半径** (spectral radius) という．これは代数的な要素をもっている．一方 $r(x)=\lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{1/n}$ は位相的に定義されたものであるが，上の定理はこの両者が一致していることを示している．

つぎに実ノルム環の場合のスペクトルについて考えてみる．実環 A の元 x のスペクトルは，定義より A の複素環拡大 A_c でのスペクトルであるから，$0\in\sigma(x)$ となる必十条件は A が単位元をもたないか，または単位元をもてば x が非正則のときである．0 でない複素数では

定理 1·20 A を実環とし，$A\ni x$ とする．ξ を 0 でない複素数とし，$\xi=\alpha+\beta i$ とおいたとき $\xi\in\sigma(x)$ となる必十条件は $|\xi|^{-2}(2\alpha x-x^2)$ が A の中で擬非正則のときである．

証明 $x\in A$ としたとき x は A_c の中では $(x,\,0)$ の形をしている．ここで $\xi^{-1}(x,0)=(\alpha/|\xi|^2x,\,-\beta/|\xi|^2x)$ が A_c で擬非正則であることと $\bar{\xi}^{-1}(x,0)=(\alpha/|\xi|^2x,\,\beta/|\xi|^2x)$ が A_c で擬非正則であることは同等であることが確かめられる．計算によりつぎの関係式をうる．

$$\begin{aligned}\xi^{-1}(x,\,0)\circ\bar{\xi}^{-1}(x,\,0)&=\bar{\xi}^{-1}(x,\,0)\circ\xi^{-1}(x,\,0)\\&=(|\xi|^{-2}(2\alpha x-x^2),0)\end{aligned}$$

それゆえ $\xi^{-1}(x,\,0)$ が A_c で擬正則となる必十条件は $(|\xi|^{-2}(2\alpha x-x^2),\,0)$ が A_c で擬正則となることであり，その結果 $|\xi|^{-2}(2\alpha x-x^2)$ が A で擬正則となることである．*qed*

系 1·21 A を実環とする．そのとき $\sigma(x)$ は複素平面上，実軸に対して対

称である．すなわち $\xi\in\sigma(x)$ なら $\bar{\xi}\in\sigma(x)$ となる．またもしξが0でない実数ならば，$\xi\in\sigma(x)$ の必十条件は $\xi^{-1}x$ が擬非正則であることである．

証明　前半は明らか（前定理）．後半の証明：ξが0でない実数で $\xi\in\sigma(x)$ なら $\xi^{-2}(2\xi x-x^2)$ はAで擬非正則．一方 $1-\xi^{-2}(2\xi x-x^2)=(1-\xi^{-1}x)^2$ なることから容易に証明できる．　　*qed*

xを複素環 A の元とする．A を複素環として見たときの x のスペクトルを $\sigma_A(x)$ で表わし，Aを実環として見たときのxのスペクトルを $\sigma_{A_R}(x)$ で表わせば，つぎの定理が成り立つ．

定理 1・22　$\sigma_{A_R}(x)$ は $\sigma_A(x)$ とその共役，すなわち $\{\bar{\xi}\,;\,\xi\in\sigma_A(x)\}$ との集合和に等しい．

証明　$0\in\sigma_{A_R}(x)$ は $0\in\sigma_A(x)$ と同じことである．それゆえ $\xi\neq 0$ と仮定してよい．ここでAの一つの元に複素数をかけるともちろんAの元となるが，A を実環と見たときその複素環拡大 A_c では，全然異なるものになる．さて $\xi=\alpha+\beta i$ (α,β は実数) ならば，$\xi x\to(\xi x,\ 0)$ であるが一方 $\xi(x,\ 0)=(\alpha x,\ \beta x)$．もし $\xi(x,\ 0)$ が A_c の中で擬正則ならば，そのときある $(u,\ v)\in A_c$ で $(\alpha x,\beta x)\circ(u,\ v)=0$．これを計算すれば，$\alpha x+u-\alpha xu+\beta xv=0$，$\beta x+v-\beta xu-\alpha xv=0$ となる．いま $w=u+iv(\in A)$ とおけば，$(\xi x)\circ w=0$，$w\circ(\xi x)=0$．すなわち ξx はAで擬正則である．かくして $\sigma_{A_R}(x)$ は $\sigma_A(x)$ をふくむ．また $\sigma_{A_R}(x)$ は前の定理より実軸に対して対称なるゆえ，$\sigma_A(x)$ の共役もふくむ．つぎに ξx も $\bar{\xi}x$ もAの中で擬正則とする．

$$u=\frac{(\xi x)^\circ+(\bar{\xi}x)^\circ}{2}\qquad v=\frac{(\xi x)^\circ-(\bar{\xi}x)^\circ}{2}$$

とおけば，これらはAの元であり

$$(\alpha x,\ \beta x)\circ(u,\ v)=(u,\ v)\circ(\alpha x,\ \beta x)=0$$

それゆえ $\xi(x,\ 0)$ は A_c で擬正則となる．これは $\sigma_{A_R}(x)$ が $\sigma_A(x)$ とその共役との集合和にふくまれることを示す．　　*qed*

以後Aは実または複素環を表わすものとする．

定理 1・23　A は実または複素環とし，$P(\xi)$ をスカラーの体の元を係数にもつ多項式とする（Aが単位元をもたない場合には定数項が0であると仮定する）．そのとき任意の $a\in A$ に対して $P(a)\in A$ で，かつ $P(\sigma(a))=\sigma(P(a))$

である.

証明 スペクトルの定義からAを複素環と仮定してよい. αを任意の複素数とし, 多項式 $\alpha-P(\xi)$ の根を $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ とする. そのときつぎのようになる.

$$\alpha-P(\xi)=\beta(\xi_1-\xi)(\xi_2-\xi)\cdots(\xi_n-\xi)$$

ここで β はスカラー. 上の式の ξ に $a(\in A)$ を入れれば, $\alpha-P(a)=\beta\prod_{i=1}^{n}(\xi_i-a)$ であるから A が単位元をもてば, $\alpha-P(a)$ が正則となる必十条件はすべての i で, ξ_i-a が正則となることである. ゆえに $\alpha\in\sigma(P(a))$ ならある i で ξ_i-a は非正則となり, $\xi_i\in\sigma(a), P(\xi_i)=\alpha$ となるからこれは $\sigma(P(a))\subset P(\sigma(a))$ を示している. 逆に $\alpha\in P(\sigma(a))$ とする. そのとき $\xi\in\sigma(a)$ で $P(\xi)=\alpha$. ある i で $\xi=\xi_i$, ξ_i-a は非正則なるゆえ $\alpha-P(a)$ は非正則. これは $\sigma(P(a))\ni\alpha$ なることを示す. つぎにAが単位元をもたないときは, 定義よりスペクトルはすべて0をふくむ. そして $P(0)=0$ である. もし $\alpha\neq 0$ ならばすべての i で $\xi_i\neq 0$ である. それゆえ

$$1-\alpha^{-1}P(\xi)=\prod_{i=1}^{n}(1-\xi_i^{-1}\xi).$$

そしてそれゆえ

$$\alpha^{-1}P(a)=(\xi_1^{-1}a)\circ(\xi_2^{-1}a)\circ\cdots\circ(\xi_n^{-1}a).$$

かくして $\alpha^{-1}P(a)$ が擬正則となる必十条件はすべての i で $\xi_i^{-1}a$ が擬正則となることである. それゆえ $\sigma(P(a))=P(\sigma(a))$ を得る. *qed*

定理 1·24 A を実または複素環とする. もし a が A の正則元とすれば, $\sigma(a^{-1})=\{\alpha^{-1}\,;\,\alpha\in\sigma(a)\}$ であり, a が擬正則であれば $\sigma(a^\circ)=\{\alpha/(\alpha-1)\,:\,\alpha\in\sigma(a)\}$ である.

証明 A が複素環のときに証明すればよい. a が正則元ならば $\alpha^{-1}-a^{-1}=-\alpha^{-1}a^{-1}(\alpha-a)$ となり, a が擬正則ならば $(\alpha-1/\alpha)a^\circ=a^\circ\circ(\alpha^{-1}a)$ である. Aが単位元をもつときは $a^\circ=a(a-1)^{-1}$ で $a=a^\circ(a^\circ-1)^{-1}$ (ここでは a は擬正則で, したがって $a\neq 1$, $a^\circ\neq 1$) である. これはaが正則であることと a° が正則なることは同等なることを示し, $\sigma(a^\circ)\ni 0$ と $\sigma(a)\ni 0$ は同等となる. 以上のことから定理は証明された. *qed*

定理 1·25 Bを Banach 環Aの閉部分環とする. そのとき $a\in B$ に対して

$\sigma_A(a) \subset \sigma_B(a) \cup (0)$．一方 $(\sigma_B(a))^{\cdot} \subset (\sigma_A(a))^{\cdot}$．ここで $M^{\cdot}$ は集合 M の境界を表わす．

証明 前半は明らか．後半を証明するためには $\sigma_A(a) \subset \sigma_B(a) \cup (0)$ なるゆえ $(\sigma_B(a))^{\cdot} \subset \sigma_A(a)$ を証明すればよい．ξ を $(\sigma_B(a))^{\cdot}$ の任意の元とし，$\xi = \alpha + \beta i$ （α, β 実数）とおく．まず A が単位元をもつときに考える．A が複素環なら環 B で考えて $\xi - a \in S \cap \bar{G} \subset Z$ （1·2 節 D 項の c），すなわち $\xi - a$ は B の位相的零因子となる．これはまた A の位相的零因子となるから $\xi \in \sigma_A(a)$ は明らかである．他方 A が実環の場合は $|\xi|^2 - 2\alpha a + a^2$ が B において位相的零因子となり，A でも位相的零因子．これは $\xi \in \sigma_A(a)$ を示す．A が単位元をもたない場合も同様な方法で定理は証明できる． qed

定理 1·26 a を Banach 環 A の一つの元とする．そのとき a をふくむ A の任意の閉部分環 B に対して $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$ となるための必十条件は $\sigma_A(a)$ が複素平面を分離しないことである，すなわち $\sigma_A(a)$ の余集合が連結であることである．ただし A が単位元をもつ（もたない）ときは単位元をもつ（もたない）部分環 B のみを考えることとする．

証明 十分性は前の定理から明らかであるから，必要性を証明する．スカラーの体の元を係数にもつ a の多項式全体の A の中での閉包を考える．これを B とする．ここで A が単位元をもたないならば，定数項なしの多項式ばかりを考える．B は A の一つの閉部分環であるが，定理 1·23 より任意の多項式 P で $P(\sigma_A(a)) = \sigma_A(P(a))$．それゆえ $\alpha \in \sigma_A(a)$ に対して $|P(\alpha)| \leqq \max\{|\beta| ; \beta \in \sigma_A(P(a))\} = r(P(a)) \leqq \|P(a)\|$．いま $\sigma_A(a)$ の余集合の有界でない連結成分を N とすれば，最大値原理より

$$\max_{\alpha \notin N} |P(\alpha)| \leqq \|P(a)\|$$

つぎに ξ を $\xi \notin \sigma_B(a)$ とする．そして $\xi = \alpha + \beta i$ （α, β 実数）とする．いま $Z(\eta)$ を多項式 $\xi^{-1}\eta$ または $|\xi|^{-2}(2\alpha\eta - \eta^2)$ （A がそれぞれ複素環，実環の場合に）とする．そのとき $Z(a)$ は B で擬正則となる．もし $\{P_n(a)\}$ を $Z(a)$ の擬逆元に収束する a の多項式の列とし，$Q_n(a) = Z(a) \circ P_n(a)$ とすれば $\|Q_n(a)\| \to 0$ （$n \to \infty$）．ところで $Z(\xi) = 1$ なるゆえ $Q_n(\xi) = 1$．もし $\xi \notin N$ なら上の式より $|Q_n(\xi)| \leqq \|Q_n(a)\| \to 0$ なるゆえ $\xi \in N$ である．さて仮定より $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$ なるゆえ N は $\sigma_A(a)$ の余集合と一致し，したがって $\sigma_A(a)$

は複素平面を分離しない．　*qed*

さてノルム環 A の部分集合 M の任意の二つの元は可換であると仮定する．その場合 M を可換集合であるということにする．そのとき Zorn の補題より A の中に M をふくむ極大可換集合が存在する．

定理 1·27　ノルム環 A の極大可換集合 B は $\sigma_B(a)=\sigma_A(a)$ $(a\in B)$ となるような A の閉可換部分環である．A の中心 (center) は A のすべての極大可換集合の共通部分である．

証明　極大可換集合は閉可換部分環なることと，A の中心は A は極大可換集合の共通部分であることは明らかである．それゆえ $\sigma_B(a)=\sigma_A(a)$ $(a\in B)$ を証明すればよい．さて $a\in B$ が A で擬正則とすれば，$A\ni x$ が a と可換なら $x\circ a=a\circ x$ なるゆえ

$$a^\circ\circ x=a^\circ\circ x\circ a\circ a^\circ=a^\circ\circ a\circ x\circ a^\circ=x\circ a^\circ.$$

これは a° と x とが可換なること，したがって a° が B のすべての元と可換なることを示す．B の極大性から $a^\circ\in B$ でなければならない．同様に B の元が A で正則ならば B でも正則でなければならぬから $\sigma_B(a)=\sigma_A(a)$．　*qed*

つぎに $\sigma(x)$ を x の関数として見たときに，それは一価ではなく複素数の集合ではあるが，つぎの定理のように，ある意味の連続性をもつ．

定理 1·28　x を Banach 環 A の中の元とし，V を複素平面の $\{0\}$ の任意の開近傍とする．そのとき $\delta>0$ が存在して $\|y-x\|<\delta$ ならば $\sigma(y)\subset\sigma(x)+V=\{\alpha+\beta\,;\,\alpha\in\sigma(x),\ \beta\in V\}$．

証明　A を複素環としてよい．もし定理が成立しないと仮定すれば，$U=\sigma(x)+V$ とおきおのおのの n に対して $x_n\in A$，スカラー ξ_n が存在して $\|x_n-x\|<1/n$，$\xi_n\in\sigma(x_n)$，$\xi_n\notin U$ となる．$\|x_n\|\leqq\|x\|+1/n$ から数列 $\{\xi_n\}$ は有界となるから，その部分列を適当にとって収束させうる．この部分列を再び $\{\xi_n\}$ とおき $\xi_n\to\xi$ とする．そのとき $\xi\notin U$ は明らかであるが，$\xi\notin\sigma(x)$ である．もし $\xi=0$ なら A が単位元をもち x は正則である．さらに $\xi_n-x_n\to -x$ なるゆえ十分大きな n で ξ_n-x_n は正則である．これは不合理なるゆえ $\xi\neq 0$．それゆえ $\xi^{-1}x$ は擬正則で $\xi_n{}^{-1}z_n\to\xi^{-1}x$，ゆえに十分大きな n で $\xi_n{}^{-1}z_n$ は擬正則．これは $\xi_n\in\sigma(x)$ に反する．　*qed*

注意　A を単位元をもつ複素 Banach 環とする．$\xi\notin\sigma(x)$ に対して $R(\xi,\ x)=$

$(\xi-x)^{-1}$ と定義すれば，$R(\xi, x)$ は ξ の関数と考えられる．これを x の逆核 (resolvent) とよぶ．逆核の概念はいろんなところで用いられ応用も広いが，それらについては Hille[7)]，Hille and Phillips[8)]，巻末文献③などを見られたい．

1・4 ノルム多元体

ノルム環がとくに体をなすとき，すなわち単位元をもち，かつ0でない任意の元が逆元をもつとき，それは**ノルム多元体**といわれる．つぎの Mazur-Gelfand の定理はよく知られている．

定理 1・29 すべての複素ノルム多元体は複素数体と同型である．

証明 Aを複素ノルム多元体とする．仮定よりAは単位元をもち，0でない元はすべて正則である．スペクトルの定義より，任意の0でないAの元xに対して $\sigma(x) \ni (0)$．しかし定理 1・19 (i) より $\sigma(x)$ は空集合でないから，少なくとも一つの $\xi(\neq 0)$ をふくむ．ゆえに $\xi - x$ は非正則であるから，結局 $\xi - x = 0$. すなわち $x = \xi$ となる． *qed*

系 1・30 Aを単位元をもち，そのノルムが $||x||\,||y|| \leqq \gamma \cdot ||xy||$ (γ は一つの定数) を満たす複素ノルム環とする．そのときAは複素数体と同型である．

証明 Aの元xに対して $\sigma(x)$ の境界の一点を ξ とする．1・2節D項の c より $\xi - x$ は位相的零因子となる．しかし定理の仮定より位相的零因子は0元に限るから $\xi - x = 0$, すなわち $x = \xi$ となる． *qed*

つぎに実ノルム多元体の場合を考える．まず可換環の場合にはつぎのようになる．

定理 1・31 Aを可換実ノルム多元体とする．そのとき A は実数体か，または複素数体に同型である．

証明 (x, y) をAの複素環拡大 A_c の0でない任意の元とする (1・1節D項). いまAが $x^2 + y^2 = 0$ という条件から $x = 0, y = 0$ がでるような性質をもつと仮定する．(x, y) は0でないから $x \neq 0$ か $y \neq 0$. ゆえに仮定から $z = x^2 + y^2 \neq 0$. ここで $(x, y)(xz^{-1}, -yz^{-1}) = (1, 0)$ となるから A_c は複素ノルム多元体となり，前定理より A_c の任意の元は単位元の複素数倍となる．したがってAの任意の元は単位元の実数倍となる．

さてつぎに $u^2 + v^2 = 0$ で $u \neq 0$ となる u, v がAの中にある場合を考えよう．

ここでまた $v \neq 0$ である，なんとならばもし $v=0$ なら，$u^2=0$ となり A が多元体なるゆえ不合理．いま $j=uv^{-1}$ とおけば $j^2=-1$ となることは明らか．さて $\alpha+\beta i$ を任意の複素数としたとき，$x \in A$ に対して $(\alpha+\beta i)x=(\alpha+\beta j)x$ と定義すれば A は複素環となる．$\|ix\|=\|jx\| \leqq \|j\|\,\|x\|$ なるゆえ，写像 $x \to ix$ は連続，定理 1·2 より A に新しいノルムを入れることができて，それで A はノルム環となる．A は多元体であるから定理 1·29 より A は複素体に同型である． *qed*

A が実ノルム多元体で，可換とは限らないときはつぎのようになる．

定理 1·32 A を実ノルム多元体とする．そのとき A は実数体か複素数体か，または四元数体のいずれかに同型である．

証明は，A の任意の元 x がつねに実数係数の二次方程式 $x^2+\alpha x+\beta=0$ を満たすことからいえるのであるが，ここでは証明は省略する．詳細は巻末文献⑥の p. 40 を見られたい．

注意 (i) R. E. Edwards はつぎのことを示した：A を複素ノルム環とし，A の任意の正則元 x に対して $\|x^{-1}\| \leqq \|x\|^{-1}$ が満たされるとする．そのとき A は複素数体に同型である (Wang[9] を参照)．

(ii) Mazur–Gelfand の定理 (定理 1·29) は Mazur[10] が証明なしにその事実をのせたが，はじめて証明を発表したのは Gelfand[11] で，その証明はベクトル値関数に関する Liouville の定理にもとづくものであった．関数論的な手法を用いない証明は Kametani[12]，Rickart[13] などによってなされた．

第 2 章　Banach 環の構造

この章では一般の Banach 環の構造をしらべるとともに，さらに進んで重要な環である原始 Banach 環，半単純 Banach 環の構造を明らかにする．Banach 環の構造をしらべるには，その表現が用いられるが，2·1 節から 2·3 節までは，それに関連する剰余環，極小イデアル，根基などについて述べられる．2·4 節では原始 Banach 環，半単純 Banach 環の構造を明らかにする．2·5 節では，原始イデアルおよび極大イデアルのなす空間を考えるが，これは第 3 章または第 4 章，第 5 章にも関連する．最後に 2·6 節においては，半単純 Banach 環のノルム位相の一意性について述べる．この問題は未解決であったが，最近 Johnson (1967) によって解かれた．この Johnson の定理を証明する．

2·1　イデアルと剰余環

A.　モジュラーイデアル

I を環[*] A の線型部分空間とする．I が A の**左イデアル** (left ideal) であるとは，$x \in A$，$y \in I$ に対して $xy \in I$ となることをいう．同様に I が $x \in I$，$y \in A$ に対して $xy \in I$ となるとき**右イデアル** (right ideal) といわれる．I が左イデアルで同時に左イデアルのとき，**両側イデアル**という．

I を左イデアルとして，つぎのように定義する．

（1）　I が**純左イデアル**であるとは $I \neq A$ のとき．

（2）　I が**極小左イデアル**であるとは，それが（0）でなく，また I にふくまれる（0）でない左イデアルが I 以外に存在しないとき．

（3）　I か**極大左イデアル**であるとは，I は純左イデアルであり，I をふくむ純左イデアルは I のみであるとき．

（4）　**I がモジュラー左イデアル** (modular left ideal) といわれるのは，A に元 e が存在して $A(1-e) \subset I$ となることである．ここで $A(1-e)$ は $\{a-ae\,;\, a \in A\}$ を表わす．元 e を I を法 (module) とした A の**右単位** (right

---

[*] 本書では，A が環であるとは，実数体あるいは複素数体の上の多元環であることをいう．

identity）という．

（5） I が**擬正則左イデアル**といわれるのは，それにふくまれるすべての元が擬正則（1·2 節C項）なるとき．

ここですべての元が左擬正則である左イデアル I は擬正則となる．なんとなれば，x を I の任意の元とすれば x は左擬正則なるゆえ，$y\in A$ が存在して $y\circ x=0$ となる．そのとき $y=yx-x$ となるゆえ $y\in I$. 仮定より y はまた左擬正則．ところが y はすでに右擬正則で，$y\circ x=0$ であるから当然 $x\circ y=y\circ x=0$ となるはずである．これは x が擬正則となることを示している．

以上 I が左イデアルの場合に述べてきたが，同様に右イデアルの場合でも考えられる．

いま e を左イデアル I を法としての A の右単位としたとき，つぎのことが容易に証明される．

a． m を I の任意の元としたとき $e+m$ も I を法とした右単位である．これは $A(1-e-m)\subset I$ から明らか．

b． e^k（k：正整数）も I を法とした右単位である．なんとなれば $A(1-e^k)=A(1+e+\cdots+e^{k-1})(1-e)\subset I$.

c． 両側イデアル I が左イデアルとしても右イデアルとしてもモジュラーであるとき，I を法として同時に A の右単位でも左単位でもある元 $e(\in A)$ が存在する．なんとなれば $A(1-e_1)\subset I$, $(1-e_2)A\subset I$ とすれば，$e_2-e_2e_1\in I$ で $e_1-e_2e_1\in I$ であるから $e_1-e_2\in I$. これから e_1（または e_2）が I を法とした右単位でまた左単位になる（上の **a** により）．この場合両側イデアルは**モジュラーイデアル**といわれる．

d． e を A の任意の元とすれば $A(1-e)$ はモジュラー左モジュラーイデアルで，e はこのイデアルを法とした右単位となることは明らかであるが，このイデアルが純イデアルとなる必十条件は e が左擬非正則となるときである．なんとなれば e が左擬正則となることは $e\in A(1-e)$ と同等．それゆえそれはまた $A(1-e)=A$ と同等なることをいえばよいが，それには $e\in A(1-e)$ から $A(1-e)=A$ を出せばよい．x を任意の A の元とする．$a\in A$ で $a\circ e=0$ なら $x+e=(x+e)\circ a\circ e$. $y=(x+e)\circ a$ とおけば $x=y(1-e)$ $(y\in A)$ となる．

定理 2·1 （i） 任意の純モジュラー左（右）イデアルはある左（右）極大

モジュラーイデアルにふくまれる.

(ii) I_1 をモジュラー左(右)イデアル, I_2 をモジュラー両側イデアルとする. そのとき $I_1 \cap I_2$ もモジュラー左(右)イデアルである.

証明 (i) I をモジュラー左イデアルとする. e を I を法とした A の右単位とする. Zorn の補題より I をふくみ e をふくまない極大左イデアル M が存在する. e はまた M を法とした右単位であることは明らか.

(ii) e_1, e_2 をおのおの I_1, I_2 を法とした右単位とし, $e=e_2 \circ e_1$ とおく. そのとき

$$A(1-e)=A(1-e_2)(1-e_1)\subset A(1-e_1)\subset I_1.$$

同様に

$$A(1-e)\subset I_2(1-e_1)\subset I_2.$$

ゆえに $A(1-e)\subset I_1 \cap I_2$ となり証明された. *qed*

系 2・2 A を単位元をもつ環とする. $a\in A$ が正則となる必十条件は, A の任意の極大左および極大右イデアルが a をふくまないことである.

証明 M を A の極大左(右)イデアルとし, 正則元 a をふくむとすればそれは単位元をふくむことになり不合理. 逆に A の任意の極大左および極大右イデアルが a をふくまないとすれば, $Aa=A$. なんとなれば, そうでなければ左イデアル Aa は極大左イデアルにふくまれ, 仮定により a をふくまなくなり不合理. $Aa=A$. 同様に $aA=A$. ゆえに a は正則となる. *qed*

つぎに閉イデアル(閉集合となっているイデアル)について考える.

定理 2・3 A を Banach 環とする. そのとき純モジュラーイデアルの閉包はまた純モジュラーイデアルである. とくに極大モジュラーイデアルは閉イデアルである.

証明 I を A の純モジュラー左(右)イデアルとし, e を I を法とする右(左)単位とする. そのとき I は $\{x\in A\,;\,\|e-x\|<1\}$ と交わらないことを証明すればよい. 系 1・15 より $\|e-x\|<1$ なら $e-x$ は A の擬正則元となる. $y=(e-x)^\circ$ とおけば $e=(1-y)x-y(1-e)$ となり, $y(1-e)\in I$ なるゆえ, もし $x\in I$ なら $e\in I$ となる. この矛盾は定理が成立することを示す. *qed*

B. 剰余環

いま線型空間 X とその部分空間 M を考える. $X\ni x$ に対して $x'=x+M$ とお

く．このような剰余系（coset）の全体はまた線型空間をなし，$x'+y'=(x+y)'$，$\alpha x'=(\alpha x)'$ となる．このようにしてできた線型空間を**剰余空間**（factor space）といい X/M で表わす．線型写像 $x\to x'$ はXから X/M の上への**自然な準同型写像**（natural homomorphism）といわれる．もしXがノルム $\|x\|$ をもつなら，$\|x'\|=\inf\{\|x+m\|\,;\,m\in M\}$ で X/M のノルムを定義すれば，M が X の閉部分空間のとき，ノルム $\|x'\|$ で X/M はノルム空間となる．$\|x'\|\leqq\|x\|$ となるゆえ写像 $x\to x'$ は連続となり，さらに X が Banach 空間なら X/M も Banach 空間である．

つぎにAを任意の環，IをAの両側イデアルとする．Aを一つの線型空間として考えれば，上に述べたように A/I が定義される．また A/I の任意の二つの元 x'，y' に対して $x'y'=(xy)'$ と定義すれば，Iは両側イデアルなるゆえこのように定義された A/I の積の定義は矛盾をおこさない．以上で A/I は一つの環になる．これを剰余環とよぶ．さてAがノルム $\|x\|$ をもつノルム環であるとき，IがAの閉両側イデアルならば，A/I は上述の $\|x'\|$ によってノルム環となる．なぜならばつぎが成立するからである．

$$\|x'y'\|=\inf_{a\in I}\|xy+a\|\leqq\inf_{a,b\in I}\|(x+a)(y+b)\|$$

$$\leqq\inf_{a\in I}\|x+a\|\cdot\inf_{b\in I}\|y+b\|=\|x'\|\,\|y'\|$$

さらにもしIがモジュラーイデアルで，eをIを法とする単位だとし，$\|e\|=1$と仮定すれば，$e-e^2\in I$ なることから $\|e'\|=\|e'^2\|\leqq\|e'\|^2$，それゆえ $1\leqq\|e'\|\leqq\|e\|=1$. ゆえに $\|e'\|=1$. とくにAが単位元をもつノルム環なら A/I もそうであり，Aが Banach 環なら A/I も Banach 環である．

C. 極小イデアル

つぎに後の準備のため極小イデアルの性質を述べておく．

定理 2·4 Aを任意の環としIをAの極小左イデアルで $I^2\neq(0)$ とする．そのときAのベキ等元eが存在して，$I=Ae$ で eAe は単位元eをもつ多元体である．

証明 $I^2\neq(0)$ なるゆえIの中に元uが存在して $Iu\neq(0)$. さて Iu は (0) でない左イデアルで $Iu\subset I$ でかつIは極小なるゆえ $Iu=I$ となる．それゆえ $I\ni e$ で $eu=u$. ところで $I(e-1)$ はまたIにふくまれる左イデアルであるか

ら, $I(e-1)=(0)$ または $I(e-1)=I$ となる. 後の場合は I の元 v が存在して $ve-v=e$ となり, $u=eu=veu-vu=0$ で $Iu\neq(0)$ に反するゆえ, $I(e-1)=(0)$. このことから $e^2=e$ で $Ae\neq(0)$ がでる. また $Ae\subset I$ なるゆえ I の極小性から $Ae=I$ となる. つぎに eae を eAe の任意の0でない元とする. そのとき $I=Ae$ の極小性より $Aeae=Ae$, そして eAe の元 ebe が存在して $(ebe)(eae)=e$. すなわち eae は eAe の左正則元となる. このことは eAe は多元体なることを示している. *qed*

定理 1·29, 1·32 よりつぎの系をうる.

系 2·5 Aを Banach 環とする. そのとき eAe は実数体, 四元数体または複素数体に同型である. とくにAが複素 Banach 環のときは $eAe=\{\lambda e\,;\,\lambda$ 複素数$\}$.

定義 eAe が多元体となるようなベキ等元 e を**極小ベキ等元** (minimal idempotent) という.

定理 2·6 環Aの中では (0) 以外の左(右) イデアルIはいつも $I^2\neq(0)$であるとする. もし $e\in A$ が極小ベキ等元で, ある $u\in A$ で $eu\neq0$ ($ue\neq0$) なら左イデアル Aeu (右イデアル ueA) は極小となる.

証明 Iを Aeu の中にふくまれる (0) でない左イデアルとする. $I^2\neq(0)$ なるゆえ I の中の元 aeu, beu が存在して $aeubeu\neq0$. ゆえにもちろん $eube\neq0$. eAe は多元環なるゆえ $c\in eAe$ が存在して $ceube=e$.

$$Aeu\supset I\supset Abeu\supset Aceubeu=Aeu$$

これより $I=Aeu$ で, これは Aeu が極小左イデアルであることを示している. *qed*

系 2·7 環Aは前の定理のような性質をもつとする. eが極小ベキ等元ならば, $Ae(eA)$ は極小左 (右) イデアルである.

定義 環Aの中のすべての極小左 (右) イデアルの和, すなわちそれらをふくむ最小の左 (右) イデアルを**左 (右) ソクル** (socle) ということにする. 左ソクルも右ソクルも存在し, そしてそれらが等しければそれを単にAの**ソクル**とよぶ.

定理 2·8 もし左 (右) ソクルが存在すれば, それは (0) でないAの両側イデアルである.

証明 IをAの任意の極小左イデアルとする．そしてuをAの任意の元とする．そのときIuはAの左イデアルであるが，もし$Iu \neq (0)$なら，ある$v \in I$で$vu \neq 0$である．Iは極小なるゆえvをふくむ最小な左イデアルに等しくなるはずである．それゆえvuをふくむ最小な左イデアルはIuに等しい．いいかえれば$Iu=(0)$かIuはAの極小左イデアルとなる．これは左ソクルが両側イデアルであることを示す． *qed*

定理 2·9 Aが極小左または右イデアルをふくみ，Aの中の(0)でないイデアルIではいつも$I^2 \neq (0)$ならAのソクルは定義される．

証明 定理2·4，系2·7よりAの極小ベキ等元の集合を$\{e_\lambda\}$としたとき，左（右）ソクルは$\{Ae_\lambda\}$（$\{e_\lambda A\}$）から生成される．左（右）ソクル$S_L(S_R)$をとすれば，$e_\lambda \in S_L$でかつ，前の定理からS_Lは両側イデアルであるゆえ$e_\lambda A \subset S_L$．それゆえ$S_R \subset S_L$となる．同様にして$S_L \subset S_R$であり，両者は一致する． *qed*

注意 モジュラーイデアル，ソクルについての詳細は巻末文献⑦を参照のこと．

2·2 表 現

Aを実数体または複素数体の上の多元環とする．今までもそれを単に実環および複素環ということにしている．Xを実または複素線型空間とし，$\mathfrak{L}(X)$をXからそれ自身への線型作用素全体の環とする．そのときAから$\mathfrak{L}(X)$への準同型写像を，AのXにおける**表現**（representation）という．その表現が**忠実**（faithful）であるといわれるのは，その準同型写像が同型となるときである．Xをノルム空間とするとき，Aから$\mathfrak{B}(X)$（1·1 節B項の例2）の中への準同型写像を**ノルム表現**ということにする．ノルム環の場合は特にことわらなければ，表現はすべてノルム表現のこととする．

定義 表現$a \to T_a$をXにおけるノルム環Aの表現とする．もしある定数βで$\|T_a\| \leqq \beta\|a\|$ $(a \in A)$となれば，その表現を**（一様）連続な表現**といい，また任意の$x \in X$に対して定数β_xが存在して$\|T_a x\| \leqq \beta_x \|a\|$ $(a \in A)$となれば，$a \to T_a$を**強連続な表現**という．Banach の共鳴定理（1·1 節A項のd）によりXが Banach 空間ならば強連続な表現は連続である．

連続な表現の一つの例として左正則表現とよばれるものがある．$a \in A, x \in A$

で $A_a x = ax$ と定義すれば $a \to A_a$ がAのAにおける（後者のAを線型空間と見ている）一つの表現となるが，これをAの**左正則表現**という．Aがノルム環ならば，この表現は強連続である．なんとなれば，$\|A_a x\| = \|ax\| \leqq \|a\|\,\|x\|$ となるからである．この左正則表現が忠実となるのは，どのようなときであるか．それはAの左零化イデアル*)が（0）となるときである．なんとなれば，$A_a = A_b$ なら，すべての $x \in A$ で $ax = bx$．ここで A が上の条件を満たせば $a = b$ となり，$a \to A_a$ は忠実となる．逆に $a \to A_a$ が忠実なら，Aが上の条件を満たすことも明らか．とくにAが単位元をもてば，$a \to A_a$ は忠実となる．

つぎに $\mathfrak{B}$ を $\mathfrak{L}(X)$ の部分環とする．M を X の部分空間とし，つぎのように定義する．

定義　M が $\mathfrak{B}$ に関して不変であるとは，$\mathfrak{B}$ の任意の元Tで $T(M) \subset M$ となることである．$z \in X$ で $M_z = \{Tz;\ T \in \mathfrak{B}\}$ とおけば，M_z は $\mathfrak{B}$ に関して不変なることは明らかだが，ある $z \in X$ に対して $M_z = X$ となるとき $\mathfrak{B}$ を**サイクリック** (strictly cyclic) という．また X がノルム空間なるとき $\overline{M}_z = X$（ある $z \in X$ で）なら $\mathfrak{B}$ は**位相的サイクリック** (topologically cyclic) といわれる．前者の場合 z を**サイクリック元**といい，後者の場合**位相的サイクリック元**ということにする．環 $\mathfrak{B}$ は，それに関して不変な X の部分空間が（0）とXしか存在しないとき**既約** (strictly irreducible) といわれ，Xがノルム空間の場合，閉不変部分空間が（0）とXしかないとき $\mathfrak{B}$ を**位相的既約** (topologically irreducible) という．$\mathfrak{B}$ $(\neq (0))$ が既約（位相的既約）なることと，X の 0 でないすべての元がサイクリック（位相的サイクリック）であることは等しい．

さて $a \to T_a$ をAのXにおける表現とし，MをXの部分空間でこの表現に関して不変とする．すなわち任意の $a \in A$ で $T_a(M) \subset M$ と仮定する．そのときつぎのように定義する．

定義　T_a を M の上に縮小して考えると，A の M における表現 $a \to T_a{}^M$ が定義できる．この表現を $a \to T_a$ の M に**縮小した表現**という．ここでXがノルム空間なら $\|T_a{}^M\| \leqq \|T_a\|$ となる．また $T_a{}^{X/M} x' = (T_a x)'$ $(x' \in X/M)$ と定義し，Aの X/M における表現 $a \to T_a{}^{X/M}$ を考える．M は $a \to T_a$ に関して不変であると仮定しているから，このような表現は定義できる．これを表

*)　Aの左零化イデアルとは $\{x \in A : xA = (0)\}$ を表わす．

現 $a \to T_a$ の**環元** (reduction) という．Xがノルム空間で，MをXの閉部分空間とすれば X/M もノルム空間で，$\|T_a{}^{X/M}\| \leqq \|T_a\|$ となる．

ここで左正則表現 $a \to A_a$ について考える．

IをAの左イデアルとする．そのときIは左正則表現に関して不変 ($A_a I \subset I$) なるゆえ，$a \to A_a$ をIに縮小したものが考えられる．これを**IにおけるAの左正則表現**といい $a \to A_a{}^I$ で表わす．つぎのことは明らか．

a． $u \in I$が $a \to A_a{}^I$ に関してサイクリックとなる必十条件は $I = Au$ なること，すなわちIはuから生成された主左イデアル (principal left ideal) となることである (巻末補遺を見よ)．

b． $a \to A_a{}^I$ が既約となるための必十条件はIが極小であることである．

つぎに $a \to A_a$ から表現 $a \to A_a{}^{A/I}$ が導かれる．この表現をAの A/I における左正則表現という．$a \to A_a{}^{A/I}$ に対してつぎが成り立つ．

定理 2·10 表現 $a \to A^{A/I}$ が既約である必十条件は I が極大左イデアルとなることである．またAが Banach 環でIが閉であれば，この表現が位相的既約となるための必十条件はIが極大閉左イデアルとなることである．とくにIがモジュラーなら既約であることと位相的既約であることは一致する．

証明 I_1 をAの左イデアルでIをふくんいるとし，I_1' を I_1 の A/I の中への像とする．I_1 は左イデアルなるゆえ I_1' は表現 $a \to A_a{}^{A/I}$ に関して A/I の不変部分空間である．また $I \subset I_1, I_1 = \{x\,;\, x' \in I_1'\}$ なるゆえ $I_1 \longleftrightarrow I_1'$ は一対一対応となり，さらに M_1 を A/I の中の，表現 $a \to A_a{}^{A/I}$ に関して不変な部分集合とすれば，$I_1 = \{x;\; x' \in M_1\}$ はIをふくむAの左イデアルとなる．このことから I をふくむ左イデアル全体と A/I の中の不変部分空間の間に一対一対応があることになる．これは表現 $a \to A_a{}^{A/I}$ が既約であることと I が極大なることは同等なることを示す．つぎにAを Banach 環として I を閉としたとき，Iをふくむ閉左イデアルばかりを考えて上と同様な証明で位相的既約のほうもできる．また I が純モジュラーのとき I の閉包も純モジュラー (定理 2·3) なるゆえ後半も明らか． *qed*

定理 2·11 $a \to T_a$ を環Aの線型空間Xにおけるサイクリック表現とする．そのとき A のモジュラー左イデアル I が存在して，その表現 $a \to T_a$ は表現 $a \to A_a{}^{A/I}$ に代数的に同値である．もしAがノルム環，Xがノルム空間であり

$a \to T_a$ が強連続ノルム表現なら I は閉イデアルとなる．もしまた A が Banach 環，X が Banach 空間ならその同値性は位相的となる．

証明　$u \in X$ を表現 $a \to T_a$ に関してのサイクリック元とし $I=\{a \in A\,;\,T_a u=0\}$ とする．I は A の左イデアルであることは明らかであるが，その表現がノルム的で強連続ならば I は閉となる．u はサイクリック元なるゆえ $e \in A$ が存在して $T_e u=u$．任意の $a \in A$ で $T_{a(1-e)}u=0$ なるゆえ $A(1-e) \subset I$ となり，これは I がモジュラーなることを示す．さて $x'=x+I \in A/I$ に対して $Ux'=T_x u$ とおく．$x_1-x_2 \in I$ から $T_{x_1}u=T_{x_2}u$ がでるから，$x' \to Ux'$ は A/I から X の中への写像として定義できる．これは一対一写像である．なんとなれば $0=Ux'=T_x u$ なら，これから $I \ni x$ となり $x'=0$ となるからである．U は線型であり，また u はサイクリックなるゆえ U の値域は X 全体となることは明らかである．ここで

$$UA_a{}^{A/I}x'=U(ax)'=T_{ax}u=T_a T_x u=T_a Ux'$$

となることから，すべての $a \in A$ で $UA_a{}^{A/I}=T_a U$ となるゆえ二つの表現 $a \to T_a$, $a \to A_a{}^{A/I}$ は代数的に同値となる．もし $a \to T_a$ がノルム的で強連続なら

$$\|Ux'\|=\|T_x u\|=\|T_{x+m}u\| \leqq \beta\|x+m\| \quad (m \in I).$$

これから $\|Ux'\| \leqq \beta\|x'\|$ となり，写像 $x' \to Ux'$ は連続となる．もし X が Banach 空間なら開写像定理（1・1 節A項の c）より U の逆写像もまた連続となり，二つの表現は位相的同値となる．　*qed*

定理 2・12　$a \to T_a$ をトリビアルでない環 A の線型空間 X における既約表現とする．そのとき A に極大モジュラー左イデアル M が存在して，表現 $a \to T_a$ は表現 $a \to A_a{}^{A/M}$ と代数的に同値である．

証明　既約表現はサイクリック表現なるゆえ前の定理と定理 2・10 から明らかである．　*qed*

つぎの定理は後で必要となる．

定理 2・13　$\mathfrak{B}$ を線型空間 X の上の線型作用素からなる既約 Banach 環とする．u を X の 0 でない元とし，X の任意の元 x に対してつぎのように定義する（$\|T\|$ は $\mathfrak{B}$ のノルム）．

$$|x|=\inf\{\|T\|,\ Tu=x,\ T \in \mathfrak{B}\}$$

そのときXはノルム $|x|$ により Banach 空間となり，$\mathfrak{B}$ の任意の元Tは $|x|$ によってすべて有界となる：$|T|=\sup\{|Tx|,\ |x|\leqq 1\}\leqq\|T\|$.

証明 $\mathfrak{J}=\{T\in\mathfrak{B};\ Tu=0\}$ とおけば，$\mathfrak{J}$ は $\mathfrak{B}$ のモジュラー左イデアルである．なんとなればuはサイクリック元なるゆえ $\mathfrak{B}$ の中のある元 T_0 で $T_0u=u$ となる．そのとき $\mathfrak{B}(I-T_0)\subset\mathfrak{J}$ となり，これは $\mathfrak{J}$ が $\mathfrak{B}$ のモジュラー左イデアルであることを示す．さてUを $\mathfrak{J}$ にふくまれない $\mathfrak{B}$ の任意の元とすれば $Uu\neq 0$. それゆえ任意の $T\in\mathfrak{B}$ に対して $\mathfrak{B}$ の元Sが存在して $SUu=Tu$. $T=SU+(T-SU)$ で $T-SU\in\mathfrak{J}$ なるゆえ，これは $\mathfrak{J}$ は $\mathfrak{B}$ の極大左イデアルなることを示している．$\mathfrak{B}$ は Banach 環なるゆえ $\mathfrak{J}$ は $\mathfrak{B}$ で閉で $\mathfrak{B}/\mathfrak{J}$ は Banach 空間となる．ここで写像 $T'\to Tu$ $(T'=T+\mathfrak{J})$ は $\mathfrak{B}/\mathfrak{J}$ からXの上への同型写像となるが，$|x|$ は $\mathfrak{B}/\mathfrak{J}$ のノルムとみなされるゆえXは $|x|$ で Banach 空間となる．さらに

$$|Tx|=\inf_{Su=Tx}\|S\|\leqq\inf_{Su=x}\|TS\|\leqq\|T\|\inf_{Su=x}\|S\|=\|T\|\,|x|.$$

すなわち $|T|\leqq\|T\|$ となる． qed

さて環Aの左正則表現 $a\to A_a$ から，表現 $a\to {A_a}^{A/I}$ を考える．この表現をAの A/I における左正則表現ということは，すでに述べたが，この表現の核は $\{a\in A\,;\,aA\subset I\}$ に等しいことは明らか．このような集合はAの両側イデアルとなるが，それを左イデアルIの**商** (quotient) とよび $I:A$ と書くことにする．

定義 両側イデアルが**原始的** (primitive) であるとは，それが一つの極大モジュラー左イデアルの商であるときにいう．結局両側イデアルが原始的であるとは，それがAの A/M における左正則表現の核になっていることである．ここでMはAの一つの極大モジュラー左イデアルである．

いまIをモジュラーイデアルとすれば，$I:A\subset I$ であるから原始イデアルは純イデアルとなる．また Banach 環の中では，極大モジュラーイデアルは閉集合であるから，原始イデアルは Banach 環においてはやはり閉である．つぎの定理は一般の環Aにおける原始イデアルのよく知られた性質を集めたものである．

定理 2·14 (i) 両側イデアルが原始的となる必十条件は，それがAの一つのトリビアルでない既約表現の核となることである．

（ii） 任意の極大モジュラー両側イデアルは原始的である．

（iii） 任意のモジュラー両側イデアルは一つの原始イデアルにふくまれる．

（iv） Pを原始イデアルとして，I_1, I_2 が $I_1I_2\subset P$ となるような左イデアルとすれば $I_1\subset P$ であるか $I_2\subset P$ を満たす．

証明 （i）はほとんど明らか．なんとなれば I を原始的とすればそれは一つの極大モジュラー左イデアル J の商であり，Iは表現 $a\to {A_a}^{A/J}$ の核となる．逆に I は一つのトリビアルでない既約表現 $a\to T_a$ の核とすれば，定理2・13 より極大モジュラー左イデアルJが存在して，I は表現 $a\to {A_a}^{A/J}$ の核となり結局 $I=J:A$ となる．（ii） MをAの極大モジュラー両側イデアルとする．そのとき M をふくむ極大モジュラー左イデアルIが存在する．$MA\subset M\subset I$ なるゆえ $M\subset I:A$ となる．Mが極大なるゆえ $M=I:A$ となり原始的となる．（iii）は（ii）から明らかなるゆえ（iv）を証明する：P は原始的なるゆえ $P=M:A$ とおく．ここでMは A の極大モジュラー左イデアルである．もし $I_1I_2\subset P$, $I_2\not\subset P$ とすればそのとき $I_2A\not\subset M$ は明らかなるゆえ I_2A+M は M をふくむ左イデアル，そして M は極大なるゆえ $I_2A+M=A$. それゆえ

$$I_1A\subset I_1I_2A+I_1M\subset PA+M\subset M.$$

これは $I_1\subset P$ なることを示す．　　　　　　　　　　　　　　　　*qed*

系 2・15 Aを可換とすれば原始イデアルと極大モジュラーイデアルは同じになる．

証明 Pを原始イデアルとすれば極大モジュラーイデアル Mで $P=M:A$. そしてそれが Mをふくむから明らか．　　　　　　　　　　　　　　*qed*

注意 表現や原始イデアルのさらにくわしい代数的な理論は巻末文献⑦を見られたい．

2・3 根　　基

定理 2・14 で証明されたように，環Aの原始イデアルとAのトリビアルでない既約表現の核とは同等である．ここでAのすべての原始イデアルの共通部分，いいかえればAのすべてのトリビアルでない既約表現の核の共通部分をAの**根基** (radical) といい R で表わす．Aのトリビアルな表現，すなわちすべての $a\in T$ で $T_a\equiv 0$ のような表現がAの唯一の既約表現であるとき，Aを**根基環**

(radical algebra) といい，この場合 $R=A$ とする．$R=(0)$ ならばAは半単純 (semi-simple) といわれる．

つぎは根基の基本的な性質である．

定理 2·16 (i) 根基RはAの両側イデアルである．

(ii) Aが根基環でないなら，そのときRはAの極大モジュラー左（または右）イデアルすべての共通集合である．

(iii) RはAの擬正則左（または右）イデアル（2·1 節A項参照）すべての和集合である．

(iv) Rは任意のスカラーαと任意のAの元xに対して $(\alpha+x)q$（または $q(\alpha+x)$）が擬正則となるようなAの元qの集まりである．

証明 (i) 定義から明らか．(ii) の証明：I を極大モジュラー左イデアルとすれば，$I:A\subset I$ でかつ $I:A$ は原始イデアルなるゆえ Rはすべての極大モジュラー左イデアルの共通部分にふくまれることになる．他方 $r\notin R$ なら定義より一つのXにおけるAの既約表現 $a\to T_a$ が存在して $T_r\neq 0$ となる．ゆえに $T_ru\neq 0$ となる $u\in X$ が選べるから $I=\{a\,;\,T_au=0\}$ とおく．そのときIはAの極大モジュラー左イデアルなることは明らかでまたrをふくまない．これは (ii) を証明する．(iii) aをAの任意の左擬非正則元とする．そのとき $A(1-a)$ は純モジュラー左イデアルである．それゆえそれは極大モジュラー左イデアルMにふくまれる．$a\notin M$ は明らかでまた (ii) より $R\subset M$ なるゆえRのすべての元は左擬正則であることがわかる．すなわちRは擬正則イデアルである．つぎに $r\notin R$ とする．そして $a\to T_a$ を $T_r\neq 0$ となる既約表現とし，$T_ru\neq 0$ となる $u\in X$ をとる．$a\to T_a$ は既約なるゆえ $b\in A$ が存在して $T_{br}u=u$．それゆえ任意のAの元aで $T_{a\circ(br)}u=u$ なるゆえ，これは $a\circ(br)=0$ とならないことを示す．いいかえれば br は擬正則ではない．これから任意の擬正則な左イデアルはRにふくまれる．(iv) 定理 1·13 (iii) より $(\alpha+x)q$ が擬正則なることと $q(\alpha+x)$ が擬正則なることは同等なるゆえ，この場合 $(\alpha+x)q$ に対していえればよい．Rは擬正則イデアルなるゆえ，任意のスカラー α, $x\in A$, $q\in R$ で $(\alpha+x)q$ は擬正則である．逆にqは任意の α, x で $(\alpha+x)q$ が擬正則だとすれば，$\{(\alpha+x)q\,;\,\alpha,\,x\ \text{任意}\}$ はqをふくむ擬正則左イデアルである．(iii) より $q\in R$ となる． *qed*

根基はすべてのベキ零元イデアル (nilideal), すなわちその任意の元がベキ零元であるイデアルをふくむ. なんとなればベキ零元は擬正則であるからである. $a^n=0$ のとき $b=-\sum_{i=1}^{n-1}a^i$ とおけば $a\circ b=b\circ a=0$ となる.

ここでノルム環の場合つぎのように定義する.

定義　ノルム環のイデアルのおのおのの元が位相的ベキ零元, すなわち $r(x)=0$ となるような元 x であればそのイデアルを**位相的ベキ零元イデアル**とよぶ.

定理 2·17　任意のノルム環の根基は位相的ベキ零元イデアルである.

証明　Aを実または複素ノルム環とする. そして a を R の任意の元, $\xi=\alpha+\beta i$ (α, β 実数) を 0 でない複素数とすれば $|\xi|^{-2}(2\alpha a-a^2)$ も R の元なるゆえ, 擬正則である. ゆえに A が実ノルム環のとき定理 1·20 より $\sigma(a)=(0)$. また A が複素ノルム環のときも $\xi\neq 0$ で $\xi^{-1}a$ 擬正則なるゆえ $\sigma(a)=(0)$. ゆえに定理 1·19 (i) より $r(a)=0$ となる.　*qed*

定理 2·18　Banach 環Aの根基Rはつぎの性質をもつ.

(i)　Rは閉両側イデアルである.

(ii)　Rは位相的ベキ零元イデアルで, 位相的ベキ零元左 (または右) イデアルすべての集合和である.

証明　(i)　R は極大モジュラー左イデアルすべての共通部分で, A は Banach 環なるゆえRは閉となる. (ii)　IをAの任意の位相的ベキ零元左イデアルとする. I の任意の元は擬正則なるゆえ I は擬正則イデアルであり, 定理 2·16 (iii) よりRにふくまれる. これは (ii) を証明したことになる.　*qed*

系 2·19　Banach 環A において位相的ベキ零元全体の集合 N がイデアルをなせば $R=N$ となる. とくにAが可換ならば $R=N$ である.

証明　後半は定理 1·3 (iv) から明らか.　*qed*

系 2·20　半単純可換環 A の任意の部分環 (閉でも閉でなくともよい) はまた半単純である.

証明　Aは可換なるゆえ $R=N$ でAの半単純性から $N=(0)$ となる. Bの根基は B の中の位相的ベキ零元イデアルであるゆえ N にふくまれる, そして (0) となる.　*qed*

定義　環Aの**強根基** R_S(strong radical) とはAのすべての極大モジュラー

両側イデアルの共通集合のこととする．もしAに極大モジュラー両側イデアルが存在しなければ $R_S=A$ とおくことにする．$R_S=(0)$ ならば A を強半単純 (strongly semi-simple) という．

定理 2·21　強根基は根基をふくむ．

証明　定理 2·14 (ii) よりすべての極大モジュラー両側イデアルは原始的なるゆえ明らか．　*qed*

系 2·19 においてNがイデアルでなければ，$R=N$ とはならない．また定理 2·21 において $R_S\supset R$ とはなるが，一般には両者は等しくない．つぎにその例を示そう．

例　Xを二次元以上の Banach 空間とし，$A=\mathfrak{B}(X)$ (1·1 節B項例 2) とおく．すなわち A は X からそれ自身への有界線型作用素全体からなる環とする．この A において，位相的ベキ零元全体の集合 N がもしイデアルをなせば，系 2·19 よりそれは R に一致する．しかるに $R=(0)$ である．なんとなれば，$a\in A$ に対して $T_a x=a(x)$ $(x\in X)$ とおけば，$a\to T_a$ は A の X における一つの表現となっている．この表現は既約表現であり，かつその核は (0) であるから $R=(0)$ となる．その結果 $N=(0)$ となるはずである．しかしNは 0 でない元をふくむことをつぎに示す：x_0 を X の 0 でない元とし，0 でない $f\in X'$ (X' は X の共役空間) を適当に選んで $f(x_0)=0$ とする．そのとき $(x_0\otimes f)y=(f(y))x_0$ $(y\in X)$ で定義された $x_0\otimes f$ は $\mathfrak{B}(X)$ のベキ零元となる：$y\in X$ で

$$(x_0\otimes f)^2 y=(x_0\otimes f)(f(y)x_0)=f(y)f(x_0)x_0=0$$

この $x_0\otimes f$ はNにふくまれ $N=(0)$ とはならない．つぎにAの強根基 R_S は (0) でないことを示そう．定義より R_S は A の極大両側イデアル全体の共通部分である．ゆえに A の (0) でない任意の両側イデアル I が $x\otimes f$ $(x\in X,\ f\in X')$ をすべてふくむことを証明すればよい．T を 0 でない I の一つの元とすれば

$$(x\otimes g)\cdot T\cdot(y\otimes f)=[g(Ty)](x\otimes f)$$

ここで適当に y, g を選べば，$x\otimes f\in I$ となる．その結果 R_S は $x\otimes f$ の形の元の有限個の和をすべてふくむことになる．そのような集合は $\mathfrak{B}(X)$ のソクルになっていることが，後で示される (2·4 節B項)．

2・4 原始 Banach 環，半単純 Banach 環

この節ではまず半単純 Banach 環の特別な場合である原始 Banach 環について，その性質をしらべ，そのあと任意の半単純 Banach 環が原始 Banach 環の一つの族の部分直和に連続的に同型となっていることを示す（定理 2・30）．

A. 原始 Banach 環

定義 環 A で零イデアル（0）が原始イデアルとなれば，A は**原始環**（primitive algebra）といわれる．もちろん原始環は半単純環である．

いいかえれば A が原始環であるというのは $M:A=(0)$ となる極大モジュラー左イデアル M が A に存在することである．また別ないい方をすれば A が原始環とは，忠実な既約表現が存在することである．ゆえに原始環の研究は線型作用素の既約環の研究に帰着するのである．

$\mathfrak{B}$ を $\mathfrak{L}(X)$（線型空間 X からそれ自身への線型作用素全体の環）の部分環とする．$\mathfrak{B}$ が既約であるとは，X の任意の元 $x(\neq 0)$, y に対して，$\mathfrak{B}\ni T$ が存在して $Tx=y$ となることであった．既約性をもう少し強くしてつぎのように定義する．

定義 $\mathfrak{B}$ が X の上で $\boldsymbol{n}$ **次推移的**（n-fold transitive）であるとは，X の任意の一次独立な元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ と任意の元 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ に対して $\mathfrak{B}\ni T$ が存在して $Tx_i=y_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ となることである．すべての n で n 次推移的な環 $\mathfrak{B}$ を X の上で**稠密**（strictly dense）という．$\mathfrak{B}$ が既約であるということは一次推移的と同等である．

定理 2・22 X の上で二次推移的である環 $\mathfrak{B}$ は，X の上で稠密である．

証明 帰納法により $\mathfrak{B}$ が k 次 $(k\geqq 2)$ 推移的なら $(k+1)$ 次推移的なることを証明すればよい．$x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}$ を X の中で一次独立とする．$(k+1)$ 次推移的なることを証明するために $1\leqq i\leqq k+1$ なるすべての i に対して，$\mathfrak{B}\ni T_i$ が存在して，$T_i x_i\neq 0$ かつ $T_i x_j=0$ $(j\neq i)$ を示せばよい．なんとなれば，$y_1, y_2, \cdots, y_{k+1}$ を X の中の任意の $k+1$ 個の元としたとき $\mathfrak{B}$ の元 S_i を $S_i T_i x_i=y_i$ と選ぶ．そして $T=S_1 T_1+\cdots+S_{k+1}T_{k+1}$ とすれば，そのとき $Tx_i=y_i$ $(i=1, \cdots, k+1)$ となる．さて k 次推移的なることより任意の i_0 と $i_0\neq i_1$ となる i_1 で $S\in\mathfrak{B}$ が存在して $Sx_i=0$ $(i\neq i_0, i_1)$ かつ $Sx_{i_0}\neq 0$ となる．もし $Sx_{i_1}=0$ なら

この S が求めるものである．また Sx_{i_1} と Sx_{i_0} が一次独立ならば二次推移性より $U\in\mathfrak{B}$ が存在して $USx_{i_1}=0$, $USx_{i_0}\neq 0$. このときは US が求めるものである．Sx_{i_1} と Sx_{i_0} が一次従属ならば $Sx_{i_0}=\alpha Sx_{i_1}$ ($Sx_{i_1}\neq 0$ のとき) で，$\{x_i;\ i\neq i_0,\ i_1\}$ と $x_{i_0}-\alpha x_{i_1}$ は一次独立なるゆえ $V\in\mathfrak{B}$ が存在して $Vx_i=0$ $(i\neq i_0,\ i_1)$ かつ $V(x_{i_0}-\alpha x_{i_1})\neq 0$. ここで $Vx_{i_1}=0$ ならVが求めるものだが，Vx_{i_1}, Vx_{i_0} が一次独立なら $W\in\mathfrak{B}$ を選んで $WVx_{i_1}=0$, $WVx_{i_0}\neq 0$ となり WV が求めるものになる．それゆえ $Vx_{i_0}=\beta Vx_{i_1}$ となる場合が問題となる．そのときは $\alpha\neq\beta$. 最後に $Y\in\mathfrak{B}$ を選んで $YVx_{i_1}=Sx_{i_1}$ とし $T=S-YV$ とすれば，$Tx_i=0$ $(i\neq i_0)$ で $Tx_{i_0}=Sx_{i_0}-YVx_{i_0}=(\alpha-\beta)Sx_{i_1}\neq 0$. これは定理が成立することを示す． *qed*

定理 2·23 $\mathfrak{B}$ を線型空間Xの上の線型作用素からなる既約 Banach 環とする．また $\mathfrak{E}$ をXを加群と見たときの X の自己準同型写像で$\mathfrak{B}$のおのおのの元と交換可能なもの全体の集合とする．そのとき$\mathfrak{E}$は実数体，複素数体または四元数体に同型である．もし$\mathfrak{B}$が複素 Banach 環の場合は $\mathfrak{E}$ は複素数体となる．

証明 定理 2·13 より X の中にノルム $|x|$ が導入できて，このノルムでXは Banach 空間となり$\mathfrak{B}$のすべての元 T で $|T|\leqq\|T\|$ (ここで $\|T\|$ は$\mathfrak{B}$の始めに与えられたノルム)．ここで $|x|$ はX のある0でない元 u で $|x|=\inf\{\|T\|,\ Tu=x\}$ で与えられる．Eを$\mathfrak{E}$の任意の元としたとき，そして $T\in\mathfrak{B}$ を $Tu=x$ と選んだとき $Ex=ETu=TEu$. スカラーαに対して $(\alpha T)u=\alpha x$ なるゆえ $E(\alpha x)=\alpha Ex$ となり E は線型となる．さらに $|Ex|=|TEu|\leqq|T|$ $|Eu|\leqq\|T\|\ |Eu|$ (T は $Tu=x$ となるものに対して)．それゆえ $|Ex|\leqq|x|$ $|Eu|$ となり，E は $|x|$ に関して有界となる．さて$\mathfrak{B}$は既約なるゆえ，X を$\mathfrak{B}$-加群と考えれば既約．定理の仮定より $\mathfrak{E}$は $\mathfrak{B}$-加群Xの核心化群 (centralizer) となり，巻末文献⑦ p. 26 より$\mathfrak{E}$は体となる．結局 $\mathfrak{E}$ はノルム多元体となり，定理 1·29, 定理 1·32 より定理は証明された． *qed*

つぎの定理は Rickart[14], Yood[15] による．

定理 2·24 $\mathfrak{B}$ を線型空間Xの上の線型作用素からなる既約複素 Banach 環とする．そのとき$\mathfrak{B}$は X の上で稠密となる．

証明 定理 2·22 より$\mathfrak{B}$が二次推移的であることが証明されればよい．このためにはXの中の任意な一次独立な元 v, w に対して $T\in\mathfrak{B}$ が存在して $Tv=$

0, $Tw \neq 0$ が証明されればよい. もしそうでないとすれば, $Tv=0$ なら必ず $Tw=0$ となる. いま x を X の任意の元とすれば, $Vv=x$ となる $V \in \mathfrak{B}$ が存在する. ここで $Ex=Vw$ と定義する. もし $V_1v=V_2v$ とすれば $V_1w=V_2w$ なるゆえ Ex は V の選び方に無関係に定義できる. さらに任意の $T \in \mathfrak{B}$ に対して $TEx=TVw$. ところで $(TV)v=Tx$ なるゆえ $E(Tx)=(TV)w$. いいかえれば $TE=ET$ となる. またもし $Vv=x$, $Wv=y$ とすれば $(V+W)v=x+y$. それゆえ $E(x+y)=(V+W)w=Vw+Ww=Ex+Ey$. ゆえに E は加群 X の上の自己準同型写像となる. 定理 2・23 より $E=\lambda I$ (λ は複素数, I は恒等写像) となる. ところで $Iv=v$ なることより $Ev=Iw=w$ で, $\lambda Tv=ETv=TEv=Tw$, すなわち $T(\lambda v-w)=0$. T は $\mathfrak{B}$ の任意の元なるゆえ $w=\lambda v$ となり v, w の独立性に反する. *qed*/

系 2・25 複素 Banach 環が原始的である必十条件はそれが一つの Banach 空間における忠実な連続稠密表現をもつことである (巻末補遺を見よ).

証明 A が原始環なら忠実な既約表現をもつから A は $\mathfrak{L}(X)$ の中の一つの既約複素部分環 $\mathfrak{B}$ と同型となる. 前定理より $\mathfrak{B}$ は稠密となる. *qed*/

B. 極小イデアルをもつ原始 Banach 環

極小イデアルをもつ原始 Banach 環について考えるに際し, まず共役線型空間の概念を導入する.

定義 二つの実または複素線型空間 X, Y が**共役** (dual) といわれるのは $X \times Y$ の上に定義された関数 (スカラーの値をとる) (x, y) がつぎの二つの条件を満たすときである.

(i) $(x, y)=0$ がすべての $x \in X$ で満たされれば $y=0$ となり, すべての $y \in Y$ で $(x, y)=0$ なら $x=0$ となる.

(ii) (x, y) は y を固定すれば x で線型, x を固定すれば y のほうで線型となる.

もし X, Y がノルム空間ならば, (i), (ii) のほかにつぎの (iii) が満たされれば X, Y は**ノルム共役**といわれる.

(iii) 定数 α が存在して $|(x, y)| \leq \alpha \|x\| \|y\|$ $(x \in X,\ y \in Y)$.

(ii) を満たす (x, y) を**双一次形式** (bilinear form) という.

定理 2・26 X, Y を双一次形式 (x, y) をもつ共役線型空間とする. もし

$y_1, y_2, \cdots, y_n$ をYの一次独立なn個の元とすれば，Xの中に $(x_i, y_j)=\delta_{ij}$ $(i, j=1, 2, \cdots, n)$ となるような元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ が存在する．

証明 数学的帰納法で証明する．任意の $y \neq 0$ に対して $x \in X$ が存在して $(x, y)=1$ となるから $n=1$ の場合は証明された．いま $x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}$ が存在して，$(x_i, y_j)=\delta_{ij}$ $(i, j=1, 2, \cdots, k-1,\ k \leqq n)$ となったとする．任意の $x \in X$ に対して

$$a=x-\sum_{i=1}^{k-1}(x, y_i)x_i$$

とおけば $(a, y_j)=0$ $(j=1, \cdots, k-1)$．また

$$(a, y_k)=(x, y_k-\sum_{i=1}^{k-1}(x_i, y_k)y_i)$$

であるから $y_1, y_2, \cdots, y_k$ の一次独立性よりある x を選べば $(a, y_k) \neq 0$．ゆえに $x_k=(a, y_k)^{-1}a$ とおけばよい． qed

定義 X, Y を共役線型空間とする．そして T を X の上の線型作用素としたとき，つぎのように定義された Y の上の線型作用素 T' を T の**随伴作用素** (adjoint) という．

$$(Tx, y)=(x \quad T'y) \quad (x \in X,\ y \in Y)$$

共役空間の定義の（i）より T' がもし存在すれば，それは一意にきまる．もし T' が存在すれば X の上の作用素として $(T')'$ が存在してそれはTに等しい．T' が存在するようなTの集合は $\mathfrak{L}(X)$（$=X$ の上の線型作用素全体の環）の部分環をなしている．

つぎに $a \in X$, $f \in Y$ に対して $a \otimes f$ でもって，つぎのようなXの線型作用素を表わす．

$$(a \otimes f)x=(x, f)a \quad (x \in X)$$

このとき $(a \otimes f)'$ が存在してつぎのようになる．

$$(a \otimes f)'y=(a, y)f \quad (y \in Y)$$

一つの線型作用素の**階数** (rank) とは，その作用素の値域の次元のことをいう．階数 n の線型作用素は明らかにつぎの形に書ける．

$$Tx=\sum_{i=1}^{n} f_i(x)a_i \quad (x \in X)$$

ここで $a_1, a_2, \cdots, a_n$ はXの一次独立な元で，$f_1, f_2, \cdots, f_n$ はX の上の線型汎関

数である．もしこのTに随伴作用素T'が存在したとすれば

$$(x, T'y)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x)(a_i, y).$$

前の定理よりYの中に元 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ が存在して $(a_i, y_j)=\delta_{ij}$ $(i, j=1,2,\cdots, n)$ となるから

$$f_j(x)=(x, T'y_j) \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

ここで $f_i=T'y_i$ とおけば $T=\sum_{i=1}^{n} a_i\otimes f_i$ と書ける．ゆえに随伴作用素をもち階数有限なXの線型作用素全体は $T=\sum a_i\otimes f_i$ の形のもの全体となる．

さて極小イデアルをもつ原始 Banach 環はいかなる形になるかを考える．ここでは複素環の場合に限ることにする．原始 Banach 環は，一つの線型空間Xの上の作用素からなる稠密環$\mathfrak{B}$とみなすことができる（系 2·25）．$\mathfrak{B}$の二つの0でない元 T_1, T_2 に対してはもちろん $x_1, x_2\in X$ が存在して $T_1x_1\neq 0$, $T_2x_2\neq 0$ となる．$\mathfrak{B}$は既約なるゆえ $T\in\mathfrak{B}$ が存在して，$TT_2x_2=x_1$ となる．かくして $T_1TT_2\neq 0$ で，このことから左（右）イデアル$\mathfrak{J}$で $\mathfrak{J}^2=\{0\}$ となるものは $\mathfrak{J}=\{0\}$ に限ることがわかる．定理 2·9 より$\mathfrak{B}$が極小片側イデアルをふくむならば，$\mathfrak{B}$の左ソクルと右ソクルは一致しソクルを定義する．もし$\mathfrak{L}$を$\mathfrak{B}$の極小左イデアルとすればベキ等元Eが存在して $\mathfrak{L}=\mathfrak{B}E$ となるが（定理 2·4），このEの階数は1であることをつぎに示そう．そうでないとして Ex_1, Ex_2 $(x_1, x_2\in X)$ がXで一次独立であるとする．そのときある $T\in\mathfrak{B}$ で，$TEx_1=Ex_1$, $TEx_2=0$ となる．$ETE\neq 0$ と$\mathfrak{B}E$の極小性から $\mathfrak{B}TE=\mathfrak{B}E$ である．とくに$S\in\mathfrak{B}$ が存在して $STE=E$. しかしこれは $Ex_2=STEx_2=0$ から不合理．かくしてEの階数は1．それゆえ$\mathfrak{B}$の任意の極小左イデアル$\mathfrak{L}$で，$\mathfrak{L}$の中の0でない任意の作用素はみな階数1となる．逆に $E\in\mathfrak{B}$ を任意の階数1の作用素とすれば$\mathfrak{B}E$は$\mathfrak{B}$の極小左イデアルとなる（系 2·7 参照）．それゆえに$\mathfrak{B}$のソクルは有限階数の作用素からなる．他方Tを$\mathfrak{B}$の任意の有限階数の作用素とすれば，Xの中に一次独立な元 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ とXの上の線型汎関数 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ が存在して $T=a_1\otimes f_1+\cdots+a_n\otimes f_n$ となる．つぎに $U_i\in\mathfrak{B}$ を $U_ia_j=\delta_{ij}a_i$ $(i, j=1,2,\cdots,n)$ のように選ぶ．そのとき $U_iT=a_i\otimes f_i$ となる．その結果 $T=U_1T+\cdots+U_nT$ となる．さて作用素 U_iT は階数1で$\mathfrak{B}$にふくまれ，$U_iT\in\mathfrak{B}U_iT$. この右辺のイデアルは$\mathfrak{B}$のソクルにふくまれるから，U_iT そ

して T は $\mathfrak{B}$ のソクルにふくまれる．結局 $\mathfrak{B}$ のソクルは有限階数の $\mathfrak{B}$ の中の作用素全体の集合と一致することになる．

つぎに f を X の上の任意の線型汎関数とし，ある0でない $a\in X$ で $a\otimes f$ が $\mathfrak{B}$ に属すると仮定する．$\mathfrak{B}$ が既約であることと $T(a\otimes f)=Ta\otimes f$ なることから，Xのすべての元 x で $x\otimes f\in\mathfrak{B}$ となる．さて $\mathfrak{F}$ をある0でない $a\in X$ で $a\otimes f\in\mathfrak{B}$（結局すべての $x\in X$ で $x\otimes f\in\mathfrak{B}$ となるが）となるXの上の線型汎関数 f の全体の集合とする．明らかに $\mathfrak{F}$ は $\mathfrak{L}(X)$ の部分空間となる．$f\in\mathfrak{F}$, $T\in\mathfrak{B}$ で $f_T(x)=f(Tx)$ と定義すれば，f_T はXの上の線型汎関数でまた $f_T\in\mathfrak{F}$ となる．なんとなれば $a\otimes f_T=(a\otimes f)T$ なることから明らか．さてつぎのように定義する．

$$(x,f)=f(x),\quad x\in X,\ f\in\mathfrak{F}$$

そのとき (x,f) は双一次形式となる．そしてすべての $x\in X$ で $(x,f)=0$ ならば $f=0$. またすべての $f\in\mathfrak{F}$ で $(x,f)=0$ ならば $x=0$ となる．なんとなれば，0でない $h\in\mathfrak{F}$ に対して $z\in X$ が選べて $(z,h)\neq0$ となるから，もし $x\neq0$ なら $T\in\mathfrak{B}$ を適当に選んで $Tx=z$ とする．そのとき $(x, h_T)=(z,h)\neq0$ となる．以上のことから X と $\mathfrak{F}$ は双一次形式 (x,f) のもとに共役であることがわかる．すべての $T\in\mathfrak{B}$ で

$$(Tx,f)=(x,f_T),\quad x\in X,\ f\in\mathfrak{F}$$

それゆえTの随伴作用素 T' が存在して $T'f=f_T$ となっている．$\mathfrak{B}'=\{T'\,;\,T\in\mathfrak{B}\}$ とおけば $T\longleftrightarrow T'$ は $\mathfrak{B}$ と $\mathfrak{B}'$ との間の逆同型写像である．

つぎに環 $\mathfrak{B}'$ が $\mathfrak{F}$ の上で稠密なることを示そう．$f_1, f_2,\cdots, f_n$, $g_1, g_2,\cdots, g_n$ を $\mathfrak{F}$ の任意の有限部分集合とし，$f_1,f_2,\cdots,f_n$ は一次独立とする．そのとき定理 2·26 よりXの中に元 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ が存在して $(u_j,f_i)=\delta_{ij}$ $(i, j=1,2,\cdots, n)$ となる．そして

$$T=\sum_{i=1}^{n}u_i\otimes g_i$$

とおけば $T'f_i=g_i$ $(i=1, 2,\cdots,n)$ となり $\mathfrak{B}'$ は $\mathfrak{F}$ の上で稠密であることがわかる．

さて $\mathfrak{B}$ をノルム $\|T\|$ をもつ Banach 環としたとき，その共役環 $\mathfrak{B}'$ もまたノルム $\|T'\|(=\|T\|)$ をもつ Banach 環となる．

定理 2·27 $\mathfrak{B}$ をノルム $||T||$ をもつ既約 Banach 環とする．a を X の中の固定した0でない元とし，h も $\mathfrak{F}$ の中の固定した0でない元とする．$x\in X$, $f\in\mathfrak{F}$ に対してつぎのように定義する．

$$|x|=\inf_{Ta=x}||T||,\quad |f|=\inf_{T'h=f}||T||$$

そのとき X, $\mathfrak{F}$ はおのおの $|x|$, $|f|$ をノルムとして Banach 空間となる．また両者は双一次形式 (x,f) で共役となる．

証明 X, $\mathfrak{F}$ がおのおのノルム $|x|$, $|f|$ で Banach 空間となることは，環 $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ に定理 2·13 を適用することにより証明できる．それゆえ (x,f) の連続性，すなわち $|(x,f)|\leqq\alpha|x||f|$ （αは定数）となることを証明すればよい：$(x\otimes f)^2=(x,f)(x\otimes f)$ は明らかなるゆえ

$$|(x,f)|\,||x\otimes f||=||(x\otimes f)^2||\leqq||(x\otimes f)||^2.$$

そして $|(x,f)|\leqq||x\otimes f||$. $T, S\in\mathfrak{B}$ を適当に選んで $Ta=x$, $S'h=f$ とすれば $x\otimes f=T(a\otimes h)S$ であるから

$$||x\otimes f||\leqq||a\otimes h||\,||T||\,||S||$$

ここで $Ta=x$, $S'h=f$ となる任意の T, S' で $||T||$, $||S'||$ の下限をとれば

$$|(x,f)|\leqq||x\otimes f||\leqq||a\otimes h||\cdot|x|\cdot|f|$$

ここで $\alpha=||u\otimes h||$ ととればよい． *qed*

つぎは極小片側イデアルをもつ複素原始 Banach 環に対する表現定理である．

定理 2·28 Aを極小片側イデアルをもつ複素原始 Banach 環とする．そのときノルム共役 Banach 空間 X, Y とAから $\mathfrak{B}(X)$ の中への連続同型写像 $a\to T_a$ が存在してつぎを満たす．

（i） すべての T_a はYの上の随伴作用素 T_a' をもつ．

（ii） Aのソクルは写像 $a\to T_a$ により $\mathfrak{B}(X)$ の中の $x\otimes y$ $(x\in X,\ y\in Y)$ で生成された部分環の上へ写される．

証明 系 2·25 よりAは $\mathfrak{B}(X)$ (Xはある Banach 空間) の中への連続同型写像 $a\to T_a$ をもつ．前の定理での $\mathfrak{F}$ を Y とおけば，X, Y は双一次形式 (x,y) に関してノルム共役である．ここで残っていることがらは，$\mathfrak{B}$ の任意の元Tが前定理で定義したノルム $|x|$ に関して有界であることであるが，これはすでに定理 2·13 で証明されている． *qed*

環を $\mathfrak{B}(X)$ に限って考えたとき $\mathfrak{B}(X)$ の極小左イデアルの形がはっきりする．Xを二次元以上の Banach 空間としたとき $\mathfrak{B}(X)$ の任意の極小イデアル $\mathfrak{J}$ は，ある $f_0 \in X'$ $(f_0 \neq 0)$ でつぎのように書ける．

$$\mathfrak{J} = \{y \otimes f_0;\ y \in X\}.$$

このことを用いて Eidelheit-Kawada の定理として知られているつぎのものが成立する．これは $\mathfrak{B}(X)$ の代数的な構造からXの位相を一意にきめようとするものである．

定理 2·29　X, Y を2次元以上の Banach 空間とし，$\mathfrak{B}(X)$ は同型写像φにより，$\mathfrak{B}(Y)$ と多元環として同型とする．そのときXからYの上への位相同型写像Uが存在してつぎのようになる．

$$\varphi(T) = UTU^{-1} \qquad (T \in \mathfrak{B}(X))$$

この定理の証明は巻末文献③の p. 222 または文献 16), 17) を見られたい．これらに関連して Kakutani, Mackey は Hilbert 空間Hに対して $\mathfrak{B}(H)$ の環論的および束論的な特徴付けをした．それらに関しては文献 18), 19) をみられたい．

C．半単純 Banach 環

ここでは任意の半単純 Banach 環が原始 Banach 環の部分直和になっていることを示すが，まず Banach 環の部分直和の定義から始める．

$\{A_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ を複素（または実）Banach 環の族とする．$\sum A_\lambda$ は Λ の上で定義されたベクトル値関数の集合でつぎのようなものである：すべての λ で $f(\lambda) \in A_\lambda$ で

$$\|f\| = \sup_{\lambda \in \Lambda} \|f(\lambda)\|$$

が有限値をとるようなfの全体を $\sum A_\lambda$ とする．$\sum A_\lambda$ では $(f+g)(\lambda) = f(\lambda) + g(\lambda)$, $(\alpha f)(\lambda) = \alpha(f(\lambda))$, $(fg)(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda)$ と定義することにより $\sum A_\lambda$ は Banach 環となることは明らかである．これを $\{A_\lambda\}$ の**直和** (direct sum) という．つぎに $\sum A_\lambda$ の部分環 B で任意の $\mu \in \Lambda$ に対して $\{f(\mu);\ f \in B\} = A_\mu$ のときBを $\{A_\lambda\}$ の**部分直和**ということにする．部分直和は一般にノルム $\|f\|$ で Banach 空間とはならない．さてBを $\{A_\lambda\}$ の部分直和とし，$I_\mu = \{f \in B,\ f(\mu) = 0\}$ とおく．そのとき I_μ は B の両側イデアルで B/I_μ は A_μ に同型である．もしおのおのの A_λ が原始環であれば I_λ はすべてBの原始

イデアルとなる．なんとなれば A_λ は原始環なるゆえ A_λ の極大モジュラー左イデアル M_λ が存在して $M_\lambda : A_\lambda=(0)$ となる．$P_\lambda=\{f\in B\,;\,f(\lambda)\in M_\lambda\}$ とおけば P_λ は B の極大モジュラー左イデアルで $P_\lambda : B=I_\lambda$ である．ここで $\cap I_\lambda=(0)$ なるゆえ B は半単純となる．同様にすべての A_λ が単純環，すなわち A_λ の両側イデアルは（0）と A_λ のみである環で，単位元をもてば I_λ は極大モジュラーイデアルとなり $\sum A_\lambda$ の部分直和 B は強半単純となる．逆に任意の半単純 Banach 環，強半単純 Banach 環は上のようにおのおの原始 Banach 環，単純 Banach 環の部分直和として表わされるだろうか．つぎの定理がその答である．

定理 2·30（i）すべての半単純 Banach 環は適当な原始 Banach 環の族の部分直和に連続的に同型である．

（ii）すべての強半単純 Banach 環は適当な単位元をもつ単純 Banach 環の族の部分直和に連続的に同型である．

証明（i）$\mathfrak{P}$ を Banach 環 A の原始イデアルすべての集合とし $\mathfrak{M}$ を A の極大モジュラー両側イデアルすべての集合とする．$P\in\mathfrak{P}$ に対して $A_P=A/P$ とおけば A_P は原始 Banach 環となることは明らか．$x\in A$, $P\in\mathfrak{P}$ に対して，$\hat{x}(P)$ を x の A_P の中への像とする．もし A が半単純ならば，すべての $P\in\mathfrak{P}$ に対して $\hat{x}(P)=0$ ということ $x=0$ とは同等である．また $\|\hat{x}(P)\|\leqq\|x\|$ なるゆえ $\|\hat{x}\|$ を直和 $\sum A_P$ のノルムとすれば $\|\hat{x}\|\leqq\|x\|$ となる．それゆえ写像 $x\to\hat{x}$ は A から $\sum A_P$ の中への連続同型写像を定義する．この写像での A の $\sum A_P$ の中への像は $\{A_P\}$ の部分直和となる．（ii）A を強半単純とするとき $M\in\mathfrak{M}$ に対して $A_M=A/M$ とおく．$x\in A$ に対して $\hat{x}(M)$ を x の A_M の中への像とする．上の場合のように $x\to\hat{x}$ は A から $\{A_M\}$ の一つの部分直和の上への連続同型写像である．M は極大モジュラーイデアルであるゆえ，A_M は単位元をもつ単純 Banach 環となる．　　*qed*

2・5 構 造 空 間

前節で環 A の原始イデアルの全体 $\mathfrak{P}$ と極大モジュラー両側イデアルの全体 $\mathfrak{M}$ を考えた．後の章でこれらが必要となるので，ここで少しくわしく述べておこう．

定義　Bを環Aの部分集合とし，$\mathfrak{F}$を$\mathfrak{P}$の部分集合とする．そのとき $h(B) = \{P \in \mathfrak{P}\,;\, P \supset B\}$ とおき，それをBの$\mathfrak{P}$における**被** (hull) という．また $k(\mathfrak{F}) = \cap \{P\,;\, P \in \mathfrak{F}\}$ をAにおける$\mathfrak{F}$の**核** (kernel) とよぶことにする．もし $\mathfrak{F} = h(k(\mathfrak{F}))$ なら$\mathfrak{F}$を**被集合**とよび，$B = k(h(B))$ ならばBを**核集合**という．$\mathfrak{M}$に関しても上と同様な定義ができる．

つぎに$\mathfrak{P}$と$\mathfrak{M}$の中に閉包作用素を入れる．$\mathfrak{M}$の中でも同じであるから，$\mathfrak{P}$の中で考える．$\mathfrak{P} \supset \mathfrak{F}$ とする．$\mathfrak{F}$が空集合のときは $\overline{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}$ とし，そうでないときは $\overline{\mathfrak{F}} = h(k(\mathfrak{F}))$ と定義する．そのときは任意の $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ に対して

(i)　$\overline{\mathfrak{F}} \supset \mathfrak{F}$

(ii)　$\overline{\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2} = \overline{\mathfrak{F}}_1 \cup \overline{\mathfrak{F}}_2$

(iii)　$\overline{\overline{\mathfrak{F}}} = \overline{\mathfrak{F}}$

ここで (i), (iii) は明らかであるから (ii) の証明をする：$k(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2) = k(\mathfrak{F}_1) \cap k(\mathfrak{F}_2)$ なるゆえ $\overline{\mathfrak{F}}_1 \cup \overline{\mathfrak{F}}_2 \subset \overline{\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2}$．他方 $k(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2) \subset P$ となるような原始イデアルPに対して

$$k(\mathfrak{F}_1)k(\mathfrak{F}_2) \subset k(\mathfrak{F}_1) \cap k(\mathfrak{F}_2) = k(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2) \subset P$$

それゆえ定理 2.14 (iv) より $k(\mathfrak{F}_1) \subset P$ または $k(\mathfrak{F}_2) \subset P$ となる．いいかえれば $P \in \overline{\mathfrak{F}}_1$ または $P \in \overline{\mathfrak{F}}_2$ となり，これは (ii) を示している．この閉包によって$\mathfrak{P}$または$\mathfrak{M}$に入れた位相を ***h*-*k* 位相**とよぶことにする．

さて定理 2·14 (ii) より $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{M}$ となり，定義からすぐわかるように，$\mathfrak{M}$の h-k 位相は$\mathfrak{P}$の h-k 位相から，部分空間として導かれた位相と同等である．ところで $P_1 \subset P_2$ となる二つの異なる原始イデアルが存在しうるから，$\mathfrak{P}$の点は h-k 位相で閉集合とは限らないから，$\mathfrak{P}$は一般には T_1-空間ではない．しかし T_0-空間である．一方$\mathfrak{M}$は T_1-空間となる．

定義　h-k 位相を入れた$\mathfrak{P}$をAの**構造空間** (structure space) という．$\mathfrak{P}$の部分空間$\mathfrak{M}$を $M_S(A)$ と書く．

今後 $M_S(A)$ についてのみ考える．$\mathfrak{P}$でも同様にできる．

定理 2·31　IをAのモジュラー両側イデアルとする．そのときIの被は $M_S(A)$ の中でコンパクトである．

証明　$h(I)$ がコンパクトなることを証明するのに，$\{\mathfrak{F}_\lambda\}$ を $h(I)$ の閉集合の族とし $\cap \mathfrak{F}_\lambda = \phi$ とする．Kを $\{k(\mathfrak{F}_\lambda)\}$ をふくむAの最小の両側イデアル

とすれば，$\mathfrak{F}_\lambda\subset h(I)$ なるゆえ $I\subset k(h(I))\subset k(\mathfrak{F}_\lambda)$．それゆえ $I\subset K$ となり，IがモジュラーなるゆえKも当然モジュラーイデアルである．もし $K\neq A$ なら $M\in M_S(A)$ が存在して $K\subset M$．これよりすべてのλで $k(\mathfrak{F}_\lambda)\subset M$ であるから $\mathfrak{F}_\lambda=hk(\mathfrak{F}_\lambda)\cap h(I)\ni M$ ($\mathfrak{F}_\lambda$ は閉) となり $\cap\mathfrak{F}_\lambda=\phi$ に反する．ゆえに $K=A$ とならねばならぬ．いま e を I を法とする単位とすれば $x_i\in k(\mathfrak{F}_{\lambda_i})$ $(i=1,\cdots,n)$ が存在して $e=x_1+\cdots+x_n$ となる．$I\subset k(\mathfrak{F}_\lambda)$ と上のことから $k(\mathfrak{F}_{\lambda_1})+\cdots+k(\mathfrak{F}_{\lambda_n})=A$ となりこれは $\mathfrak{F}_{\lambda_1}\cap\mathfrak{F}_{\lambda_2}\cap\cdots\cap\mathfrak{F}_{\lambda_n}=\phi$ なることを示す．これで $h(I)$ がコンパクトなることが証明された．　*qed*

系 2・32　Aが単位元をもてば，$M_S(A)$ はコンパクトになる．

証明　この場合は零イデアルをモジュラーイデアル I として考えればよい．　*qed*

定理 2・33　IをAの両側イデアルとし $A'=A/I$ とおく．そのとき $M_S(A)$ におけるIの被 $h(I)$ は写像 $M\to M/I$ によって $M_S(A')$ と同相になる．また $M_S(A)-h(I)$ は写像 $M\to M\cap I$ によって $M_S(I)$ と同相になる．

証明　$M\to M/I$ が $h(I)$ から $M_S(A')$ の上への一対一写像であることは見やすい．ここで$\mathfrak{F}$を $h(I)$ の任意の集合としたとき $\mathfrak{F}'$ を $M_S(A')$ の中への $\mathfrak{F}$ の像とすれば，すなわち $\mathfrak{F}'=\{M/I : M\in\mathfrak{F}\}$ とすれば $k(\mathfrak{F}')=k(\mathfrak{F})/I$ となる．さらに任意の $M\in h(I)$ で $k(\mathfrak{F})\subset M$ となる必十条件は $k(\mathfrak{F}')\subset M/I$ となることである．これは写像 $M\to M/I$ が $h(I)$ から $M_S(A')$ の上の同相写像であることを示す．つぎに $M\in M_S(A)-h(I)$ とする．eをMを法とするAの単位とすれば，$M\notin h(I)$ でMは極大イデアルなるゆえ $M+I=A$．それゆえ $m\in M$, $e'\in I$ が存在して $m+e'=e$ となり e' はまた M を法としたAの単位となる．もし $M'=M\cap I$ とすれば明らかに e' は M' を法としたIの単位となる．つぎにM' はIの極大両側イデアルとすることを示そう．今 M_1 を M' をふくむIの両側イデアルとすれば

$$AM_1\subset MM_1+IM_1\subset M+M_1$$

同様にして $M_1A\subset M+M_1$．これは $M+M_1$ が A の中の両側イデアルなることを示し，M が極大なることから $M+M_1=M$ または $M+M_1=A$ となる．前者の場合は $M_1=M'$ となり，後者の場合は $M_1=I$ となることがわかる．これより $M'\in M_S(I)$ となる．さてつぎに $M\to M\cap I$ が $M_S(A)-h(I)$ か

ら $M_S(I)$ の中への一対一対応であることを示す．$N\in M_S(I)$ を $N\neq M$ で，$N\cap I=M'$ とすればそのとき $M+N=A$ となるゆえ $IA\subset IM+IN\subset M'$．しかし $I(1-e')\subset M'$ なるゆえ $I\subset M'$ となり不合理．これで写像 $M\to M/I$ が一対一になったが $M_S(I)$ の上への写像なることはつぎのようにしてわかる．$M_S(I)$ の任意の元を M' とする．e' を M' を法とした I の単位として $M=M'+A(1-e')$ とおけば

$$\begin{aligned}(1-e')A&\subset(1-e')A(1-e')+(1-e')Ae'\\&\subset A(1-e')+e'A(1-e')+(1-e')Ae'\\&\subset A(1-e')+I(1-e')+(1-e')I\\&\subset A(1-e')+M'=M\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}AM'&\subset(1-e')AM'+e'AM'\subset(1-e')A+IM'\\&\subset M+M'=M\end{aligned}$$

同様にして $M'A\subset M$ となる．これらにより M は A のモジュラー両側イデアルであることが示された．さらに M は A の極大イデアルとなる．もし $e'\in M$ なら $e'=m'+a(1-e')$ $(m'\in M')$ となるから，$a=e'-m'+ae'\in I$，それゆえ $a(1-e')\in M'$ (e' は M' を法とした I の単位)．これから $e'\in M'$ となり不合理であるから $e'\notin M$ となり M は A の純イデアルとなる．さて M_1 を M をふくむ A の純両側イデアルとすれば $M_1\cap I=M'$ ($M+I=A$ から明らか) から

$$M_1A\subset M_1M+M_1I\subset M+M'\subset M$$

一方 $M_1(1-e')\subset M$ なるゆえ $M_1\subset M$ となる．これは M が $M_S(A)-h(I)$ の一つの元であることを示す．さて $M\to M\cap I$ が同相写像なることを証明しよう．$\mathfrak{F}$ を $M_S(A)-h(I)$ の一つの部分集合とするとき $\mathfrak{F}'$ で，$\mathfrak{F}$ の $M_S(I)$ の中への像を表わすことにすれば $k(\mathfrak{F}')=k(\mathfrak{F})\cap I$ となる．$M\in M_S(A)-h(I)$ で，$M'=M\cap I$ とおいたとき $M\supset k(\mathfrak{F})$ から $M'\supset k(\mathfrak{F}')$ が出ることは明らかであるが，逆に $M'\supset k(\mathfrak{F}')$ から $M\supset k(\mathfrak{F})$ が出ることをいう．これがいえれば $M\to M\cap I$ は同相写像となり定理は証明されたことになる．もし $M\not\supset k(\mathfrak{F})$ なら $M+k(\mathfrak{F})=A$ となるから $IA\subset IM+Ik(\mathfrak{F})\subset M\cap I+k(\mathfrak{F})\cap I\subset M'$．しかし M' は I のモジュラーイデアルなるゆえ $I\subset M'$ となり不合理となる．　qed

定理 2·34　I_1，I_2 を A の両側イデアルとする．そのとき $\mathfrak{M}$ の中で $h(I_1+I_2)=h(I_1)\cap h(I_2)$，$h(I_1\cap I_2)=h(I_1)\cup h(I_2)$ となる．

証明 $I_1+I_2 \supset I_1$, I_2 なるゆえ前者は明らかである．また $h(I_1)\cup h(I_2)\subset h(I_1\cup I_2)$ も明らかなるゆえ $h(I_1)\cup h(I_2)\supset h(I_1\cap I_2)$ を証明する．$M\in h(I_1\cap I_2)$ で $M\notin h(I_1)$ と仮定する．そのとき M は極大イデアルなるゆえ $M+I_1=A$. 前の定理の証明の中で示されたように，I_1 は M を法とする A の単位 e をふくむ．ゆえに $I_2\subset I_2(1-e)+I_2e\subset M+I_1\cap I_2\subset M$. いいかえれば $M\in h(I_2)$ となる． *qed*

定理 2·35 I_1, I_2 をAの両側イデアルとする．そのとき $A=I_1+I_2$ となる必十条件は I_1+I_2 はモジュラーで，かつ $\mathfrak{M}$ の中で $h(I_1)$, $h(I_2)$ が共通点をもたないことである．

証明 上の定理より $h(I_1+I_2)=\phi$ と $h(I_1)\cap h(I_2)=\phi$ は同等．ゆえに $A=I_1+I_2$ なら $h(I_1+I_2)=\phi$ で $h(I_1)\cap h(I_2)=\phi$ となる．逆に I_1+I_2 がモジュラーで $h(I_1+I_2)=\phi$ なら $I_1+I_2=A$ とならなければならぬ． *qed*

注意 原始イデアルの集合に h-k 位相を入れることは文献 20) で考えられた．また可換環において，極大イデアルの集合で h-k 位相を考えることは文献 21) でなされた．

2·6 ノルム位相の一意性，Johnson の定理

一つの環にそれが Banach 環になるようにノルムを入れる．どんな方法で入れても，それらのノルムは同値となる場合を考える．これは一般の環では成り立たない．たとえばAを一つの線型空間とし，Aの任意の二つの元の積はいつも 0 となると定義すればAは環をなすが，Aを Banach 空間とするような同値でない二つのノルムが存在しうるから，その二つのノルムでAは Banach 環となる．このような根基環Aではノルムの一意性はいえないわけであるが，では任意の半単純環Aではノルムの一意性はいえるか，すなわちAを Banach 環とするようなノルムはすべて同値となるかという問題が以前からあった．Aが可換であるときはそれが成り立つことはわかっていたが（巻末文献⑥ p. 75)，最近一般の半単純環でこの問題が Johnson（文献 22) によって解決された．この Johnson の証明を紹介する．

Johnson の定理を証明する前に少し準備をしておこう．

さて $||x||_1, ||x||_2$ を環Aを Banach 環とする二つのノルムとしたときこのノルムが同値であるとは，定数 α, β が存在して $||x||_1\leqq\alpha||x||_2\leqq\beta||x||_1$ $(x\in A)$

となることである．閉グラフ定理（1·1 節A項b）により二つのノルムが同値ということと $||x_n||_1\to 0$, $||s-x_n||_2\to 0$ ならば $s=0$ ということは同等である．このことがらよりつぎのように定義する．$A\ni s$ に対して

$$\varDelta(s)=\inf_{x\in A}(||x||_1+||s-x||_2)$$

$\varDelta(s)=0$ となる $s(\in A)$ すべての集合を S で表わすことにする．また $\varDelta(s)=\inf_{x\in A}(||s-x||_1+||x||_2)$ とも書ける．$\varDelta(s)$ はつぎの性質をもつ．

（1）　$\varDelta(s+t)\leqq\varDelta(s)+\varDelta(t)$

（2）　$\varDelta(\alpha s)=|\alpha|\varDelta(s)$（$\alpha$ はスカラー）

（3）　$\varDelta(s)\leqq\min(||s||_1,\ ||s||_2)$

（4）　$\varDelta(st)\leqq\varDelta(s)(||t||_1+||t||_2)$

　　　$\varDelta(st)\leqq(||s||_1+||s||_2)\varDelta(t)$

性質（1),（2）から $\varDelta(s)$ が半ノルムなることがわかり，（3),（4）より S は A の両側イデアルであり，どちらのノルムに関しても閉であることがわかる．ここでもし A がこの二つのノルムに関して完備であれば，$S=(0)$ ということとこの二つのノルムが同値であることは同等である．

定理 2·36　A は二つのノルム $||x||_1$, $||x||_2$ に関して Banach 環となると仮定し，a を A の中心（center）の任意の元とすれば $r_A(a)\leqq\varDelta(a)$ となる．

証明　A は二つのノルムに関して Banach 環なるゆえ $r_A(x)\leqq||x||_1$ でかつ $r_A(x)\leqq||x||_2$ である（定理 1·3, 1·19)．a を A の中心の任意の元とすれば，x と $a-x$ は可換なるゆえ

$$r_A(a)\leqq r_A(x)+r_A(a-x)\leqq||x||_1+||a-x||_2$$

これは $r_A(a)\leqq\varDelta(a)$ なることを示す．　　*qed*/

系 2·37　A が単位元をもつならば，S は純イデアルである．

証明　なんとなれば $r_A(1)=1$ なるゆえ $1\notin S$ となるから．　　*qed*/

つぎに A はノルム $||x||_1$, $||x||_2$ でノルム環になるとし，A の両側イデアル I が $||x||_1$, $||x||_2$ のおのおのに関して閉となると仮定する．$x\to\pi(x)$ を A から A/I への自然の写像（natural mapping）とする．I は $||x||_1$ でも $||x||_2$ によっても閉であるからノルム $||x||_1$, $||x||_2$ によって A/I にノルム $||\pi(x)||_1$, $||\pi(x)||_2$ を定義する．$\pi(x)=x+I$ であるから

$$||\pi(x)||_1=\inf_{a\in I}||x+a||_1,\quad ||\pi(x)||_2=\inf_{a\in I}||x+a||_2$$

である．Aの $||x||_1, ||x||_2$ に関して前に定義した関数$\varDelta$と集合Sを考える．同様に A/I の $||\pi(x)||_1, ||\pi(x)||_2$ に関しての $\varDelta$, S を $\varDelta_\pi$, S_π で表わすことにする．

定理 2·38 $\varDelta_\pi(\pi(s))\leqq\varDelta(s)$ が成立し，それゆえ $\pi(S)\subset S_\pi$ である．もし $I\subset S$ なら $\varDelta_\pi(\pi(s))=\varDelta(s)$. それゆえ $\pi(S)=S_\pi$ かつ $\pi^{-1}(S_\pi)=S$ である．

証明 $||\pi(x)||_1\leqq||x||_1$, $||\pi(x)||_2\leqq||x||_2$ なるゆえ $\varDelta_\pi(\pi(s))\leqq\varDelta(s)$ は明らか．さて任意の $\varepsilon>0$ と $s\in A$ に対して $t\in A$ が選べて

$$||\pi(t)||_1+||\pi(s-t)||_2\leqq\varDelta_\pi(\pi(s))+\varepsilon$$

つぎに z_1, $z_2\in I$ が存在して

$$||t+z_1||_1\leqq||\pi(t)||_1+\varepsilon$$
$$||s-t+z_2||_2\leqq||\pi(s-t)||_2+\varepsilon$$

それゆえ

$$||t+z_1||_1+||s-t+z_2||_2\leqq\varDelta_\pi(\pi(s))+3\varepsilon$$

これから

$$\varDelta(s+z_1+z_2)\leqq\varDelta_\pi(\pi(s))+3\varepsilon$$

となる．ここで z_1, z_2 は s と ε に関係するが，もし $I\subset S$ なら $\varDelta(z_1+z_2)=0$, それゆえ $\varDelta(s)=\varDelta(s+z_1+z_2)$ となり

$$\varDelta(s)\leqq\varDelta_\pi(\pi(s))+3\varepsilon$$

ε は任意なるゆえ $\varDelta(s)\leqq\varDelta_\pi(\pi(s))$ となり結局 $\varDelta(s)=\varDelta_\pi(\pi(s))$. *qed*

系 2·39 Aを二つのノルム $||x||_1, ||x||_2$ で Banach 環になると仮定する．もし A/I でノルム $||\pi(x)||_1$, $||\pi(x)||_2$ が同値となれば $S\subset I$ となり，逆に $S=I$ なら $||\pi(x)||_1, ||\pi(x)||_2$ は同値となる．

証明 前の定理で，$||\pi(x)||_1$ と $||\pi(x)||_2$ が同値なることから $S_\pi=(0)$, よって $\pi(S)=(0)$. これから $S\subset I$ がでる．逆に $S=I$ なら $(0)=\pi(I)=\pi(S)=S_\pi$ となり系は証明される． *qed*

ここで一般の半単純環でのノルム位相の一意性を示した Johnson（文献 22）の定理を証明しよう．

定理 2·40 Aを任意の半単純 Banach 環としたとき，Aのノルム位相は一意である．すなわち準単純環Aを Banach 環とするようなノルムはすべて同値となる．

証明 証明はかなり長いので三段にわける.

第一段 まずつぎのことを説明する:F, G を Banach 空間Eの閉部分空間で, $F+G=E$ とする. そのとき定数 $c>0$ が存在して, すべての $x\in E$ に対して $f\in F$ が存在して, (i) $\|f\|\leqq c\|x\|$, (ii) $x-f\in G$ となる. なんとなれば $F\oplus G$ からEの上への写像 $(f, g)\to f+g$ を考える. 開写像定理 (1·1 節A項c) よりこの写像は開写像なるゆえ, ある $\delta>0$ が存在して $y\in E$, $\|y\|\leqq\delta$ なら $f'\in F$, $g'\in G$, $\|f'\|\leqq 1$, $\|g'\|\leqq 1$, $f'+g'=y$ となるような f', g' が存在する. ここで $c=\delta^{-1}$ とおき, 任意の 0 でない $x\in E$ に対して $y=x\|x\|^{-1}\delta$ とおけば $\|y\|=\delta$ となるゆえ, 上で求められた f' に対して $f=c\|x\|\cdot f'$ とおけば容易に (i), (ii) が確かめられる.

第二段 Aを複素(または実) Banach 環としXを複素(または実)ノルム空間とする. ここでXは忠実な既約 A-左加群とする. 忠実とはすべての $\xi\in X$ で $a\xi=0$ となれば $a(\in A)$ が 0 元となることであり, 既約とは 0 でない $\xi_0\in X$ に対して $\{a\xi_0;\ a\in A\}=X$ となることである. ここでつぎのようなことを証明する. A, X が上のようなものとし, $\xi\to a\xi$ がすべての $a\in A$ で X から X への写像として連続であると仮定すれば, $a\xi$ は a, ξ 両方に対して連続である. すなわち $M>0$ が存在してつぎのようになる.

$$\|a\xi\|'\leqq M\|a\|\|\xi\|' \qquad (a\in A,\ \xi\in X)$$

ここで $\|\cdot\|$ はAのノルム, $\|\cdot\|'$ はXのノルムである.

なんとなればある 0 でない $\xi_0\in X$ で, $a\to a\xi_0 (A\to X)$ が連続だと仮定すれば写像 $a\to ab\to ab\xi_0$ も二つの連続写像の結合としてもちろん連続である. X は既約なるゆえ $\{b\xi_0;\ b\in A\}=X$. そのことがらから一つの $\xi_0(\neq 0)$ で $a\to a\xi_0$ が連続であると仮定すれば, すべての $\xi\in X$ で $a\to a\xi$ は連続となる. それゆえすべての $\xi\in X$ で写像 $a\to a\xi$ が連続であるということを証明するために, 0 でないすべての $\xi\in X$ で写像 $a\to a\xi$ が連続でないと仮定して矛盾を出せばよい. $X=\{0\}$ の場合はトリビアルであるゆえ $X\neq\{0\}$ の場合に考える. ここで A-左加群 X はスカラーに関して無限次元である. もしそうでないならXはスカラーに関して有限次元であり, Xは忠実であるからAも有限次元となる. この場合には A から X の中への任意の線型写像は連続となるからである. さてXは既約 A-加群なるゆえ, AのノルムはXの上の一つの完備なノルム $\|\cdot\|$

を決定する（定理 2·13），そしてAのXにおける核心化群Dは実数体，複素数体または四元数体に同型である（定理 2.23）．

Xはスカラーの上で無限次元であるから，Dの上でも無限次元である．かくしてDの上で一次独立である点列をXから選び，すなわち，$\xi_1, \xi_2, \cdots, (||\xi_i||'=1)$ をそのような列とする．

つぎに任意の $K, \varepsilon>0$ に対して，そして任意の正整数mに対して $x\in A$ がつぎを満たすように存在することを示そう．

a） $||x||<\varepsilon$

b） $x\xi_1=x\xi_2=\cdots=x\xi_{m-1}=0$

c） $||x\xi_m||'>K$

なんとなれば $J_i=\{a\in A,\ a\xi_i=0\}$ とおけば J_i は極大モジュラー左イデアルとなり，$I=(J_1\cap J_2\cap\cdots\cap J_{m-1})+J_m$ は J_m をふくむ左イデアルである．$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$ は D の上で一次独立なるゆえ，$y\in A$ が存在して $y\xi_1=y\xi_2=\cdots=y\xi_{m-1}=0$ でかつ $y\xi_m=\xi_m\neq 0$ [density theorem，巻末文献⑦の p. 28]．ここで $y\in I$, $y\notin J_m$ なるゆえIはJ_mと異なる．J_mの極大性より $I=A$ となる．ここで第一段において $E=A$, $F=J_1\cap J_2\cap\cdots\cap J_{m-1}$, $G=J_m$ とおく．写像 $x\to x\xi_m$ が連続でないからある $x_0\in A$ で $||x_0||<\varepsilon/c$, $||x_0\xi_m||'>K$. 第一段の結果を用いると，ある $x\in F=J_1\cap J_2\cap\cdots\cap J_{m-1}$ が存在して $||x||\leqq c||x_0||<\varepsilon$, かつ $x=x_0-g(g\in G=J_m)$ であるからxは上の性質 b)，c）も満たす．

ゆえに帰納法によりつぎのような性質をもつ，$x_1, x_2, \cdots, \in A$ が存在することが示される．

a） $||x_n||<2^{-n}$

b） $x_n\xi_1=x_n\xi_2=\cdots=x_n\xi_{n-1}=0$

c） $||x_n\xi_n||'\geqq n+||x_1\xi_n+\cdots+x_{n-1}\xi_n||'$

いま $z_i=\sum_{n>i}x_n$ とおく．$n>i$ に対して $x_n\in J_i$ でありJ_iはAで閉であるから $z_i\in J_i$, すなわち $z_i\xi_i=0$ かつ $z_0=x_1+x_2+\cdots+x_i+z_i$. かくして

$$||z_0\xi_i||'=||x_1\xi_i+\cdots+x_i\xi_i+z_i\xi_i||'$$
$$\geqq||x_i\xi_i||'-||x_1\xi_i+\cdots+x_{i-1}\xi_i||'$$
$$\geqq i \quad （性質\ c）より）$$

これは $\xi\to z_0\xi$ が連続，すなわちXの上の有界作用素なる仮定に反する（$||\xi_i||'$

$=1$ なるゆえ). この矛盾は任意の $\xi\in X$ に対して $a\to a\xi$ が連続であることを証明する. このことと任意の $a\in A$ に対して $\xi\to a\xi$ の連続性より $(a,\xi)\to a\xi$ は a,ξ に関して連続となる (1·1 節A項 i).

第三段 いよいよ本題に入る. Aを複素 (または実) 半単純環とする. Aを Banach 環とするような任意の二つのノルムが同値なることを示そう. この場合Aは原始環であると仮定してよい. なんとなればAが半単純環のとき, Pを A の任意の原始イデアルとして A/P を考えればそれは原始環なるゆえ, もし任意の原始 Banach 環でノルムの一意性が証明されたと仮定すれば, 環 A/P に系 2·39 を用いれば $S\subset P$ となる. Aが半単純であるからAの原始イデアルすべての共通点は (0) であるから $S=(0)$ となりAのノルムの一意性が証明されることとなる. それゆえAを原始環と仮定してよい. そのとき原始環の定義より極大モジュラー左イデアル J が存在して, $(0)=J:A$. いま $X=A/J$ を A-左加群と考えたとき, それは忠実で, 既約である. さてAを Banach 環とするような任意の二つのノルムを $||x||_1, ||x||_2$ とする. これらのノルムから得られた $X=A/J$ の上の商ノルム (quotient norm) をおのおの $||\xi||_1', ||\xi||_2'$ で表わす. ここで $||x_n||_1\to 0$, $||x_n-y||_2\to 0$ $(x_n,\ y\in A)$と仮定する. 任意の $\xi\in X$ に対して, $||x_n\xi-y\xi||_2'\to 0$. また $||x_n||_1\to 0$ なるゆえ第二段の証明より, $||x_n\xi||_2'\to 0$. このことから任意の $\xi\in X$ で $y\xi=0$ となり, Xが忠実なることより $y=0$. これは $S=(0)$ なることを示し, 二つのノルム $||x||_1$, $||x||_2$ が同値となり証明は完了した. *qed*

つぎに半単純環の準同型写像に関する定理をあげる.

定理 2·41 τを Banach 環Aから他の環Bの上への準同型写像とする. Kをτの核とし, $\bar{K}$をAでのKの閉包とする. そのときτは$\bar{K}$をBの根基の中へ写す.

証明 Bが根基環ならばよい. もしそうでないなら, L'を B の中の任意の極大モジュラー左イデアルとする. そのとき $L=\tau^{-1}(L')$ はAの中の極大モジュラー左イデアルとなる. さて $K\subset L$ で, Lは閉 (Aは Banach 環なるゆえ) であるから $\bar{K}\subset L$ で $\tau(\bar{K})\subset L'$. L' は任意であるから証明された. *qed*

系 2·42 Banach 環Aから半単純 Banach 環Bの上への任意の準同型写像の核は閉となる.

証明 上の定理でBの根基は（0）となるから明らか． *qed*

定理 2・43 τを Banach 環Aから半単純 Banach 環Bの上への任意の準同型写像とする．そのときτは連続となる．

証明 上の系よりτの核KはAの中の閉両側イデアルである．それゆえA/Kと同型であるBはノルム $||b||_1=\inf\{||a||, \tau(a)=b, a\in A\}$ で Banach 環となる．$||\tau(a)||_1\leqq||a||$ なるゆえBのノルム位相の一意性（定理 2・40）より定理は証明された． *qed*

第 3 章　可換 Banach 環

この章では可換 Banach 環の一般論について述べる．可換 Banach 環の理論においては，その極大イデアル空間 M_A が重要な役割をはたす．可換 Banach 環を A としたとき，A から $C_0(M_A)$ の中への連続な準同型写像が存在し，とくに A が半単純なるときは，それが同型写像となる（定理 3·11）．かくして連続関数からなる環，すなわち関数環が誕生するわけであるが 3·2 節はその概論である．関数環のくわしい理論は第 4 章，第 5 章でなされる．3·3，3·4，3·5 節にあげた諸定理はあとの章とも深い関係をもっている．最後の 3·6 節は完全正則 Banach 環について述べる．ここではとくに可換環のときだけに限る．

3·1　極大イデアル空間と Gelfand の表現定理

A．極大イデアル空間

前の章で極大モジュラーイデアル全体 $\mathfrak{M}$ を考えたが，A が可換環の場合 A の構造と $\mathfrak{M}$ とはさらに密接に関連する．まずつぎの定理を証明する．

定理 3·1　A を可換ノルム環とする．そして M を A の閉極大イデアルとすれば，A/M は実数体または複素数体に同型か，あるいはつぎの条件を満たす環となる：一つの元 e' で $A/M=\{\xi e',\ \xi$：スカラー$\}$ でかつ A/M の任意の二つの元 x', y' で $x'y'=0$ となる．

証明　M は極大であるから $A'=A/M$ は単純環である．すなわち（0）とそれ自身以外にイデアルをもたない．ゆえに $I'=\{x'\in A'\,;\,x'A'=(0)\}$ とおけば，I' は A' のイデアルであるから $I'=A'$ または（0）となる．さて $x\to x'$ を A から A' への自然の準同型写像（natural mapping）とすれば，M は極大なるゆえ e をMの中にないAの任意の元とすれば，Aの元 x は $x=(\xi+a)e+m$ $(a\in A,\ m\in M,\ \xi$：スカラー$)$と書ける．それゆえ $x'=\xi e'+a'e'$ となる．ここでもし $I'=A'$ なら $A'A'=(0)$ で，さらに $x'=\xi e'$ となる．他方もし $I'=(0)$ なら A' の 0 でない元 x' に対してイデアル $x'A'\neq(0)$ であるから $x'A'=A'$ でなければならぬ．これから $x'\neq0$, $y'\neq0$ なら $x'y'\neq0$ とな

る．なんとなれば $x'\neq0,\ y'\neq0$ なら $x'y'A'=x'A'=A'$ となり $x'y'\neq0$ が出る．つぎに a' を A の固定された 0 でない任意の元とすれば，$a'A'=A'$ なるゆえ $e'\in A'$ が存在して $a'e'=a'$．さらに $x'\in A'$ で $a'(e'x'-x')=0$ なるゆえ上のことから $e'x'=x'$ となり e' は A' の単位元となる．また $x'\neq0$ に対して $x'A'=A'$ なるゆえ $y'\in A'$ が存在して $x'y'=e'$ となるゆえ，これで A' は体となった．M は閉集合なるゆえ A' はノルム体となり定理 1·29，1·32 より実数体または複素数体となる． *qed*

系 3·2 A/M が実数体または複素数体に同型となるための必十条件は，M がモジュラーイデアルとなることである．

証明 A/M が実数体または複素数体になることは，それが単位元をもつことと同等である． *qed*

さて A が根基環でなければ，極大モジュラーイデアル M を含むわけであるが，上の系で見るように A/M は実数体または複素数体に同型である．後者の場合は，$x\to x+M$ なる写像を考えればそれは A のトリビアルでない*) 一つの複素準同型写像 φ を定義する．逆に A のトリビアルでない複素準同型写像 φ に対して $M=\{x\in A\,;\,\varphi(x)=0\}$ とおけば，M は A の極大モジュラーイデアルとなる．ゆえに A が複素 Banach 環のときは A のトリビアルでない複素準同型写像と A の極大モジュラーイデアルは一対一に対応する．また A が実 Banach 環の場合は A/M が実数体ならば，$M=\{x\in A\,;\,\varphi(x)=0\}$ となる φ は一つしかないが，A/M が複素数体のときはそのような φ は二つある．なんとなれば φ を A のトリビアルでない複素準同型写像とすれば，$\varphi_1(x)=\overline{\varphi(x)}$ ($\varphi(x)$ の共役複素数) で定義された φ_1 もまた一つの準同型写像で，その核は φ のものに等しい．

このようなわけで，A が複素Banach環の場合は A のトリビアルでない複素準同型写像全体と A の極大モジュラー（A が単位元をもつときは単に極大イデアル）全体とは一対一に対応がつくが，A が実 Banach 環の場合はそれがいえない．しかし今後 A のトリビアルでない複素準同型写像全体につぎに示す位相を入れたものを，A の極大イデアル空間とよぶことにする．これは後に続く第 4 章，第 5 章では複素環を主として扱う関係上，統一をとるためである．

いま任意の環 A のトリビアルでない複素準同型写像全体を M_A で表わし，そ

*) 複素準同型写像がトリビアルとは $\varphi(x)\equiv0$ となること．

れにトリビアルな準同型写像 φ_∞ をつけ加えたものを M_A^∞ と書く．また今後 $\varphi(x)$ を $\hat{x}(\varphi)$ で表わすことにする．M_A^∞ の任意の元 φ_0 の近傍系を

$$U_{\varphi_0}(x_1, x_2, \cdots, x_n; \varepsilon) = \{\varphi : |\hat{x}_i(\varphi) - \hat{x}_i(\varphi_0)| < \varepsilon,\ i = 1, 2, \cdots, n\}$$

とする．ここで $x_1, x_2, \cdots, x_n$ は A の任意の有限個の元，ε を任意の正数とする．これを **Geliand 位相**とよぶ*⁾．$\{\hat{x}\}$ は M_A^∞ の二点を分離するから，M_A^∞ の Gelfand 位相は必然的に Hausdorff 空間となる．

定義 Gelfand 位相をもつ空間 M_A をAの**極大イデアル空間**という**⁾．

定理 3·3 Aを実可換環とし，A_C をその複素環拡大とする．そのとき M_A と M_{A_C} との間につぎのような同相対応 $\varphi \to \varphi'$ が存在する．すなわちAの任意の元xに対して $\hat{x}(\varphi) = \hat{x}(\varphi')$ で，このような対応は一意にきまる．

証明 $M_{A_C} \ni \varphi$ をAの上に縮小して考えると $\varphi \in M_A$ をうる．また M_A の元φと，A_C の元 $u = (x, y)$ に対して $\hat{u}(\varphi') = \hat{x}(\varphi) + i\hat{y}(\varphi)$ のように φ' を定義すれば $\varphi' \in M_{A_C}$ となる．M_A, M_{A_C} の位相の定義から $\varphi \to \varphi'$ は同型写像である． *qed*

つぎにスペクトルと M_A との関係を考える．

定理 3·4 xを可換 Banach 環Aの任意の元とすれば

$$\sigma_A(x) - (0) \subset \{\hat{x}(\varphi) : \varphi \in M_A\} \subset \sigma_A(x)$$

もしAが単位元をもてば $\sigma_A(x) = \{\hat{x}(\varphi) : \varphi \in M_A\}$．

証明 前の定理と実環のスペクトルの定義より，Aは複素 Banach 環として証明してよい．まずφを M_A の任意の元とし $\alpha = \hat{x}(\varphi)$ とする．もし $\alpha = 0$ ならxはφの核にふくまれる．その核は純イデアルなるゆえもしAが単位元をもてばxは非正則なることは明らかでスペクトルの定義より $\alpha \in \sigma(x)$ となる．また $\alpha \neq 0$ なら $y = \alpha^{-1}x$ とおく．そのとき $\hat{y}(\varphi) = 1$ で，もし $y \circ z = 0$ なら

$$0 = \hat{y}(\varphi) + \hat{z}(\varphi) - \hat{y}(\varphi)\hat{z}(\varphi) = 1 + \hat{z}(\varphi) - \hat{z}(\varphi) = 1$$

となるからyは擬正則元ではない．それゆえ $\alpha \in \sigma(x)$ となり $\{\hat{x}(\varphi) : \varphi \in M_A\} \subset \sigma_A(x)$ は証明できた．さてαを $\sigma(x)$ の中の 0 でない複素数とする．そのとき $\alpha^{-1}x$ は擬非正則でその結果 $(1 - \alpha^{-1}x)A$ は Aの純モジュラーイデアルで，$\alpha^{-1}x$ はそのイデアルを法とする単位である．M をそのイデアルをふくむ極大

---

*⁾ Gelfand 位相は関数 $\hat{x}$ のおのおのが連続となるような一番弱い位相である．

**⁾ Rickart〔参考文献⑥〕ではこれを carrier space と名付けている．

モジュラーイデアルとしφをそれに対応するM_Aの元とすればMはφの核となる．$e=\alpha^{-1}x$はMを法とした単位なるゆえ $\hat{e}(\varphi)=\alpha^{-1}\hat{x}(\varphi)=1$ で，$\hat{x}(\varphi)=\alpha$．ゆえに $\sigma(x)-(0)\subset\{\hat{x}(\varphi):\varphi\in M_A\}$ が証明できた．つぎにAが単位元をもち$\sigma(x)\ni 0$ ならxが非正則となるゆえxAは純イデアル．xAを含む極大イデアルが定義するM_Aの元をφとすれば，$\hat{x}(\varphi)=0$ となる． *qed*

この定理からつぎが容易に導かれる．

定理 3·5 Aを任意の可換 Banach 環とする．そのとき

(i) $r_A(x)=\max\{|\hat{x}(\varphi)|:\varphi\in M_A\}$ $(x\in A)$.

(ii) Aの任意の複素準同型写像は連続（有界，ノルム$\leqq 1$）.

(iii) Aの元xがAの根基にふくまれるための必十条件はM_Aのすべての元φで $\hat{x}(\varphi)=0$ となることである．

(iv) xがAで擬正則であるための必十条件はすべての $\varphi\in M_A$ で $\hat{x}(\varphi)\neq 1$ となること．またもしAが単位元をもてば，xがAで正則となるための必十条件は，すべての $\varphi\in M_A$ で $\hat{x}(\varphi)\neq 0$ となることである．

証明 (i) 定理 1·19 (ii) より明らか．(ii) $|\hat{x}(\varphi)|\leqq r_A(x)\leqq\|x\|$（定理 1·3）より明らか．(iii) 系 2·19 とこの定理の (i) より導かれる． *qed*

Aを可換 Banach 環としたとき，その極大イデアル空間M_Aは局所コンパクト空間であることをつぎに証明しよう．M_A^∞ における位相については前に定義したが，Aが $D=\{z_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ で生成されているとしたとき，M_A^∞ の点 φ_0 の近傍系を

$$U_{\varphi_0}(x_1,x_2,\cdots,x_n;\varepsilon)=\{\varphi:|\hat{x}_i(\varphi)-\hat{x}_i(\varphi_0)|<\varepsilon,\ x_i\in D\ (i=1,2\cdots,n)\}$$

で与えてもよい．いま $\lambda\in\Lambda$ に対して C_λ はすべて複素平面を表わすものとして，C^Λ を $\{C_\lambda\}$ のカルテシァン積空間とする．そのとき $\varphi\to\{\hat{z}_\lambda(\varphi)\}$ は M_A^∞ から C^Λ への写像を定義するが，これを**標準写像** (canonical mapping) とよぶことにする．

定理 3·6 Aを可換 Banach 環とする．そのとき M_A^∞ はコンパクト Hausdorff 空間である．またAの極大イデアル空間M_Aは局所コンパクト Hausdorff 空間で，M_A^∞ は M_A に一点 φ_∞ を付加したコンパクト化である．Aが単位元をもてば，M_A 自身コンパクトとなる．

証明 $\{z_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ をAの生成元とし，M_A^∞ から C^Λ の中への標準写像を考

えるとき，それは同相写像であるが，ここでその写像による M_A^∞ の像 Φ が C^Λ でコンパクトであることを証明すれば，M_A^∞ はコンパクトとなる．また A が単位元をもてば，任意の $\varphi\in M_A$ で $\varphi(1)=1$ であるが一方 $\varphi_\infty(1)=0$．ゆえに φ_∞ は孤立点となり，M_A はそれ自身コンパクトとなる．さてここで Φ のコンパクト性をつぎに証明する．$\{\xi : |\xi|\leqq r_A(z_\lambda)\}$ を D_λ とおけば，それは C_λ の中の閉円板であり当然コンパクトである．D_λ のカルテシャン積 Π はコンパクトで C^Λ の部分集合である．M_A^∞ から C^Λ の中への像 Φ は Π にふくまれることは明らかなるゆえ，Φ がコンパクトであることをいうためには Φ が Π で閉集合なることを証明すればよい．$\{\xi_\lambda\}$ を Π の中での Φ の極限点とする．そのときある $\varphi_0\in M_A^\infty$ で $\xi_\lambda=\hat{z}_\lambda(\varphi_0)\,(\lambda\in\Lambda)$ となればよい．まず p を A の生成元の有限個 $z_{\lambda_1},\cdots,z_{\lambda_n}$ の多項式 $P(\{z_\lambda\})$ とする．任意の $\delta>0$ に対して $\varphi\in M_A^\infty$ が存在して $|\hat{z}_{\lambda_i}(\varphi)-\xi_{\lambda_i}|<\delta\,(i=1,\cdots,n)$ となるから $\hat{p}(\varphi)=P(\{\hat{z}_\lambda(\varphi)\})$ となることに注意すれば，任意の $\varepsilon>0$ に対して $\varphi\in M_A^\infty$ が存在して $|\hat{p}(\varphi)-P(\{\xi_\lambda\})|<\varepsilon$ となる．また $|\hat{p}(\varphi)|\leqq\|p\|$ となることから $|P(\{\xi_\lambda\})|\leqq\|p\|$．さて x を A の任意の元とすれば多項式列 $p_k=P_k(\{z_\lambda\})$ が選べて $\|x-p_k\|\to 0$ となるが，$\hat{p}_k(\varphi_0)=P_k(\{\xi_\lambda\})$ と定義すれば $|P(\{\xi_\lambda\})|\leqq\|p\|$ から $\hat{x}(\varphi_0)=\lim\limits_{k\to\infty}\hat{p}_k(\varphi_0)$ が存在する．この $\hat{x}(\varphi_0)$ の定義は $\{p_k\}$ の選び方に無関係である．なんとなれば x に収束する他の多項式列 $\{q_k\}$ に対しては $\|p_k-q_k\|\to 0$ となるから当然 $\hat{q}_k(\varphi_0)$ は $\hat{x}(\varphi_0)$ に収束する．このように定義された φ_0 は M_A^∞ の元であることは明らかで，すべての $\lambda\in\Lambda$ で $\hat{z}_\lambda(\varphi_0)=\xi_\lambda$ となる． *qed*

系 3·7 A は可算個の生成元 $\{z_k\}$ をもつとする．そのとき M_A^∞ の位相はつぎに定義された距離で距離空間となる．

$$\rho(\varphi_1,\varphi_2)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}|\hat{z}_k(\varphi_1)-\hat{z}_k(\varphi_2)|.$$

証明 前の定理により，M_A^∞ は可算個の円板のカルテシァン積のある閉集合に同相となるから明らか． *qed*

B. 核と被

A が複素可換環となるときは 2·5 節で述べた $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{M}$ は一致し M_A に対応[*]

[*] M_A はここでは単に A のトリビアルでない複素準同型写像の全体と考え，Gelfand 位相を考えない．

しているわけであるが，ここでは可換環の場合の核と被について述べる．

定義 B を A の部分集合，$\mathfrak{F}$ を M_A の部分集合とする．そのときつぎの集合をBの M_A の中における**被** (hull) という．

$$h(B)=\{\varphi:\varphi\in M_A,\ \forall a\in B \text{ で } \hat{a}(\varphi)=0\}.$$

またつぎの集合を$\mathfrak{F}$の A の中での**核** (kernel) という．

$$k(\mathfrak{F})=\{a:a\in A,\ \forall\varphi\in\mathfrak{F} \text{ で } \hat{a}(\varphi)=0\}.$$

もし $\mathfrak{F}=h(k(\mathfrak{F}))$ なら$\mathfrak{F}$は**被集合**，$B=k(h(B))$ ならBは**核集合**といわれる．

M_A の中で $\overline{\mathfrak{F}}=h(k(\mathfrak{F}))$ で閉包を定義してできた位相は T_1-空間 (2·5 節) であるが，それを **M_A の h-k 位相**ということにする．

つぎの定理はは後で必要となる．

定理 3·8 a を A の任意の元とし α を任意のスカラーとする．そのとき $\{\varphi\in M_A,\ \hat{a}(\varphi)=\alpha\}$ は被集合となる．

証明 $\mathfrak{F}_\alpha=\{\varphi:\varphi\in M_A,\ \hat{a}(\varphi)=\alpha\}$ とする．もし $\alpha=0$ ならば $I=Aa$ とおき，$\alpha\neq0$ なら $I=A(1-\alpha^{-1}a)$ とおく．どちらにしても $\mathfrak{F}_\alpha\subset h(I)$ は明らか．他方 $\varphi\in h(I)$ として $u\in A$ を $\hat{u}(\varphi)\neq0$ のようにとれば，$\alpha=0$ なら $v=ua$ とおけば $\hat{u}(\varphi)\,\hat{a}(\varphi)=\hat{v}(\varphi)=0$，また $\alpha\neq0$ なら $w=u(1-\alpha^{-1}a)$ とおけば $\hat{u}(\varphi)\,(1-\alpha^{-1}\hat{a}(\varphi))=\hat{w}(\varphi)=0$．ゆえにどちらにしても $\hat{a}(\varphi)=\alpha$ となり $h(I)\subset\mathfrak{F}_\alpha$ となり，$\mathfrak{F}_\alpha$ は被集合となる． *qed*

定理 3·9 $\mathfrak{F}$ を M_A の部分集合とする．そのときイデアル $k(\mathfrak{F})$ がモジュラーであるための必十条件はある $e\in A$ が存在して，すべての $\varphi\in\mathfrak{F}$ で $\hat{e}(\varphi)=1$ となることである．

証明 まずすべての $\varphi\in\mathfrak{F}$ で $\hat{e}(\varphi)=1$ とする．A の任意の元 x に対して $a=x-xe$ とおけば，$\hat{a}(\varphi)=0\ (\varphi\in\mathfrak{F})$．いいかえれば $A(1-e)\subset k(\mathfrak{F})$ となり $k(\mathfrak{F})$ はモジュラーである．逆に $k(\mathfrak{F})$ をモジュラーとして，$A(1-e)\subset k(\mathfrak{F})$ とする．任意の $\varphi\in\mathfrak{F}$ に対してある $x\in A$ で $\hat{x}(\varphi)\neq0$ となるから $a=x-xe\in k(\mathfrak{F})$．$\hat{x}(\varphi)\,(1-\hat{e}(\varphi))=\hat{a}(\varphi)=0$，$\hat{x}(\varphi)\neq0$ から $\hat{e}(\varphi)=1$ となる． *qed*

さていま環 A から環 B の中への準同型写像 τ を考える．$\varphi\in M_B^\infty$ に対して $a\to\widehat{\tau a}(\varphi)$ は A から複素数体の中への準同型写像を定義するから，それを $\tau'(\varphi)\in M_A^\infty$ で表わすことにする．ここで τ' は M_B^∞ から M_A^∞ への写像となり，この τ' を τ の**共役写像**とよぶことにする．さて M_A^∞ における $\tau'(\varphi)$ の

任意の近傍を $U_{\tau'(\varphi)}(a_1, a_2, \cdots, a_n;\ \varepsilon)$ とおけば，M_B^∞ における点 φ の近傍 $U_\varphi(\tau a_1, \tau a_2, \cdots, \tau a_n;\ \varepsilon)$ の τ' での像が $U_{\tau'(\varphi)}(a_1, a_2, \cdots, a_n;\ \varepsilon)$ の中に入ることから共役写像 τ' は連続であることがわかる．τ が A から B の**上へ**の準同型写像であるときつぎが成り立つ．

定理 3·10 τ を環 A から環 B の**上への**準同型写像とし，その核を K とする．そのとき τ の共役写像 τ'(M_B^∞ から M_A^∞ への) は M_B を $h(K)$ の**上へ**写す同相写像である．ここで $h(K)$ はイデアル K の M_A の中での被を表わす．

証明 $a\in A$ で $\hat{a}(\tau'(\varphi))=\widehat{\tau a}(\varphi)$ となるから τ' での M_B の像は $h(K)$ にふくまれる．さらに τ は A から B の**上への**像なるゆえ τ' は一対一写像となる．つぎに φ_1 を $h(K)$ の任意の元とする．任意の $b\in B$ に対して $\tau a=b$ となる $a\in A$ が存在するから $\hat{b}(\varphi)=\hat{a}(\varphi_1)$ と定義する．この定義に矛盾がないことは，$\tau a_1=\tau a_2=b$ としたとき $a_1-a_2\in K$ となり $\hat{a}_1(\varphi_1)=\hat{a}_2(\varphi_1)$ となることから明らか．このように定義された φ は M_B に属し，$\tau'(\varphi)=\varphi_1$ となることは明らかなるゆえ τ' は M_B を $h(K)$ の上へ写す．さて $U_{\varphi_0}(b_1, \cdots, b_n;\ \varepsilon)$ を M_B の点 φ_0 の任意の近傍とするとき $\tau a_i=b_i (i=1, 2, \cdots, n)$ なる $a_i\in A$ を選べば τ' は U_{φ_0} を $h(K)$ の点 $\tau'(\varphi_0)$ の近傍 $U_{\tau'(\varphi_0)}(a_1, a_2, \cdots, a_n;\ \varepsilon)$ の上に写す．これは τ' が同相なることを示している． qed

C. Gelfand の表現定理

さて，ここで可換 Banach 環における Gelfand の表現定理を証明する．この定理は半単純可換 Banach 環の構造を明らかにしたものである．そのような環は一つの局所コンパクト Hausdorff 空間の上の連続関数からなる環の中への連続同型写像をもつことを示す．

いま T を任意の位相空間とし，$C(T)$ で T の上の有界複素数値連続関数全体の環とする．この環における和，積およびスカラーの積は普通の意味の関数の和，積およびスカラーの積である．もし T が局所コンパクトであれば，その上の連続関数 f が**無限遠点で 0 となる**といわれるのは任意の $\varepsilon>0$ に対して $\{x\in T;\ |f(x)|\geqq\varepsilon\}$ はいつも T の中でコンパクトになることをいう．T の上の無限遠点で 0 となる複素数値連続関数全体の集合を $C_0(T)$ で表わす．T がコンパクトなるときは $C_0(T)=C(T)$ であり，$C(T)$, $C_0(T)$ の中の実関数の全体をおのおの $C_R(T), C_{0,R}(T)$ で表わすことにする．これらの環は $\|f\|=$

$\sup\{|f(x)|: x\in T\}$ でノルムを定義すれば Banach 環となる．$C(T), C_R(T)$ は単位元をもつ．T が局所コンパクトのとき $C_0(T)$, $C_{0,R}(T)$ は T がコンパクトのときのみ単位元をもつ．

定理 3·11 A を可換 Banach 環とすれば，A から Banach 環 $C_0(M_A)$ の中への連続準同型写像が存在し，その準同型写像の核は A の根基と一致する．それゆえ A が半単純ならばその写像は同型写像となる．

証明 A の任意の元 x に対して M_A の上の連続関数 $\hat{x}$ を対応させる．$\hat{x}(\varphi_\infty)=0$ なるゆえ $\hat{x}\in C_0(M_A)$ は明らか．$x\to\hat{x}$ は A から $C_0(M_A)$ の中への準同型写像であり，その核は A の根基となることも明らか．さらに系 3·5 (i) より $\|\hat{x}\|=\max\{|\hat{x}(\varphi)|: \varphi\in M_A\}\leqq\|x\|$．これは $x\to\hat{x}$ が連続なることを表わす． *qed*

注意 Gelfand の表現定理は文献 11) でなされた．

3・2 関 数 環 概 論

位相空間 T の上の複素数値有界連続関数全体からなる環を $C(T)$ とすれば，$C(T)$ の部分環*) を T の上の関数環という．この節では関数環についてのいくつかの性質が述べられる．関数環の理論については第4章，第5章において，くわしく論ぜられるが，ここではこの章の残りの節に関連のあるものだけを述べるにとどめる．

A. T の上の関数環と T との関係

T を位相空間とし，T の上の複素値連続関数からなる環を A とする．A は複素環の場合も実環の場合もある．T の一つの点 x に対して $f\to f(x)$ は A から複素数体の中への準同型写像を定義する．その写像を $\varphi_x\in M_A^\infty$ とする．すなわち $\hat{f}(\varphi_x)=f(x)$ である．ここで A は T の**二点を分離する**といわれるのは T の異なる任意の二点 x_1, x_2 に対して $f\in A$ が存在して $f(x_1)\neq f(x_2)$ となることである．

T の **A-位相**といわれるのは，$x_0\in T$ の近傍系としてつぎのものをとるものである．

$$U_{x_0}(f_1,\cdots,f_n;\ \varepsilon)=\{x: |f_i(x)-f_i(x_0)|<\varepsilon,\ i=1,\cdots,n\},$$

---

*) 複素数体 C の上の多元部分環のことを単に部分環といっている．

ここで $f_1,\cdots,f_n$ はAの任意の有限個の元，$\varepsilon>0$ 任意.

定理 3·12 TからM_A^∞ への写像 $x\to\varphi_x$ は，AがTの二点を分離すれば一対一連続写像である．またその写像が同相となるのはTの位相とTのA-位相が同等であるときである.

証明 M_A^∞ には Gelfand 位相 (3·1 節) が入っているから明らか. *qed*

系 3·13 Tの上の関数環Aが，あるノルム $\|f\|$ で Banach 環ならば，任意の $f\in A$ で $\sup\{|f(x)|;\ x\in T\}\leqq r(f)\leqq\|f\|$.

証明 $f\to f(x)$ は準同型写像なるゆえノルム $\|f\|$ で有界（ノルム 1)，すなわち $|f(x)|\leqq\|f\|$ となり明らか (定理 3·5). *qed*

Aが空間Tを**強い意味で分離する**とは，AがTの二点を分離し，さらにTの任意の元xに対して $f\in A$ が存在して $f(x)\neq0$ となることをいう.

定理 3·14 T を局所コンパクトで，A を $C_0(T)$ の実または複素部分環とする．もしAがTの点を強い意味で分離すれば写像 $x\to\varphi_x$ はTから M_A のある閉集合の上への同相写像である.

証明 強い意味の分離性からこの写像の像は M_A の中に入る．また前の定理から $x\to\varphi_x$ は一対一連続であるから，Tの中の任意の閉集合Fが M_A の中の閉集合 $\mathfrak{F}$ に写されることが証明されればよい．$M_A-\mathfrak{F}\ni\varphi_0$ に対して $f_0\in A$ を $|\hat{f}_0(\varphi_0)|=2\delta_0>0$ と選ぶ．$f_0\in C_0(T)$ なるゆえ $F_0=\{x\in F,\ |f_0(x)|\geqq\delta_0\}$ は T の中でコンパクトである．さて $\varphi_0\notin\mathfrak{F}$ から F_0 の任意の点 x に対して $f_x\in A$ が存在して，$|f_x(x)-\hat{f}_x(\varphi_0)|=2\delta_x>0$. つぎに $G_x=\{y: y\in T:$ $|f_x(y)-\hat{f}_x(\varphi_0)|>\delta_x\}$ とおけば，G_x は x を含む開集合で $F_0\subset\cup\{G_x: x\in F_0\}$ と F_0 のコンパクト性から $G_{x_1},\cdots,G_{x_n}\in\{G_x\}$ で $F_0\subset G_{x_1}\cup\cdots\cup G_{x_n}$ となる．$\varepsilon=\min(\delta_{x_1},\cdots,\delta_{x_n})$ とおけば $U_{\varphi_0}(f_0,f_{x_1},\cdots,f_{x_n};\varepsilon)\cap\mathfrak{F}=\phi$ が証明できるゆえ $\mathfrak{F}$ は閉集合である. *qed*

定義 Tの上の関数環Aが**自己随伴** (self-adjoint) であるというのは，$f\in A$ なら $\bar{f}\in A$ である場合をいう．ここで $\bar{f}(x)=\overline{f(x)}$ ($f(x)$ の共役複素数) である.

定理 3·15 Aを位相空間 T の上の複素関数環で関数 1 をもち，かつ自己随伴とする．もし $\inf\{|f(x)|: x\in T\}>0$ となる$f\in A$ はすべて正則（すなわち $f^{-1}\in A$ が存在する）ならば，写像 $x\to\varphi_x$ によるTの像は M_A で稠密となる.

証明 $x \to \varphi_x$ でのTの像$\mathfrak{T}$がM_Aで稠密でないとする．そのとき$\varphi_0 \in M_A$が存在してφ_0のある近傍$U_{\varphi_0}(f_1, \cdots, f_n; \varepsilon)$は$\mathfrak{T}$と交わらない．ここであるjで$\hat{f}_j(\varphi_0) \neq 0$としてよい．なんとなれば，もし必要あれば$\hat{f}_0(\varphi_0) \neq 0$となる$f_0 \in A$をあらかじめ$f_1, \cdots, f_n$につけ加えておいていいからである．ここで$\alpha_i = \hat{f}_i(\varphi_0)$, $\alpha = \sum |\alpha_i|^2$, $g = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - f_i)(\bar{\alpha}_i - \bar{f}_i)$とおく．そのとき

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - f_i(x)|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\hat{f}_i(\varphi_0) - \hat{f}_i(\varphi_x)|^2 \geqq \varepsilon^2 > 0 \ (x \in T).$$

ゆえに仮定よりgは正則となる．一方$\hat{g}(\varphi_0) = 0$であるがこれは不合理（定理3・5（iv））． *qed*

系 3・16 Tをコンパクト空間とする．そのとき$M_{C(T)}$, $M_{C_R(T)}$はおのおのTと同相である．

証明 前定理と定理3・14より明らか．

注意 この系はTが局所コンパクトのときにも拡張できる：$M_{C_0(T)}$, $M_{C_{0 \cdot R}(T)}$もやはりTと同相である．証明は定理3・15を単位元をもたない場合に改造して用いればよい．

定理 3・17 Tを完全正則T_1空間とする．そのとき写像$x \to \varphi_x$はTから$M_{C(T)}$の中の1つの稠密な部分集合の上への同相写像となる．

証明 完全正則の定義からTの位相とTの$C(T)$—位相は同等であるから$x \to \varphi_x$は同相写像である（定理3・12）．いまfを$\inf\{|f(x)|; x \in T\} > 0$となる$C(T)$の元とすればもちろん$f^{-1} \in C(T)$である．$C(T)$は自己随伴なるゆえ前の定理が適用される． *qed*

Tを完全正則T_1空間とするとき，よく知られているようにTの Čech のコンパクト化が存在する．すなわちTをその稠密な部分空間としてふくむようなコンパクト Hausdorff 空間$\beta(T)$が存在して，Tの上の任意の有界連続関数は一意に連続的に$\beta(T)$の上に拡張される．さらにまたTに対してこのような性質を満たすコンパクト化は$\beta(T)$に限ることが証明されている［巻末文献 23），24）参照］．

定理 3・18 Tが完全正則T_1空間であるとき，$M_{C(T)}$はTの Čech のコンパクト化に一致する．

証明 $M_{C(T)}$は$C(T)$が単位元をもつゆえコンパクトであり，Tの上の任意の有界な連続関数は$M_{C(T)}$の上の連続関数に拡張されるから，前の定理か

ら明らか. *qed*

B. Stone-Weierstrass の定理

Weierstrass は, 閉区間 $[a, b]$ の上の任意の実数値連続関数が実係数多項式で, 一様に近似させられることを示したが, この古典的な定理は Stone により非常にきれいな形に一般化された. このあと, その Stone-Weierstrass の定理を証明する. 複素値連続関数に関する Stone-Weierstrass の定理は, つぎに見られるように A の自己随伴性を必要とする. 自己随伴性を仮定しない Stone-Weierstrass の定理の拡張は 4·2 節で論ぜられる.

さて Stone-Weierstrass の定理［文献 23), 25) 参照］をつぎに証明する.

定理 3·19 T を局所コンパクト Hausdorff 空間とし A を $C_{0,R}(T)$ の部分環とし, T の点を強い意味で分離すると仮定する. そのとき A は $C_{0,R}(T)$ の中で稠密である. また A が $C_0(T)$ の部分環なるときは, A が T の点を強い意味で分離し, かつ自己随伴なら A は $C_0(T)$ の中で稠密である.

証明 まず最初に任意の $f\in A$ $(\subset C_{0,R}(T))$ に対して, その絶対値 $|f|$ は A の閉包に属することを証明する. 古典的な Weierstrass の定理により $\varepsilon>0$ に対して実係数の多項式 P が存在して $-\|f\|\leqq\xi\leqq\|f\|$ の区間では $|P(\xi)-|\xi||<\varepsilon$ となる. さらにここで $P(0)=0$ と仮定してもいいことが容易にわかる. これから $\|P(f)-|f|\,\|<\varepsilon$ で $P(f)\in A$ であるから $|f|\in\bar{A}$ となる. つぎに $f, g\in A$ に対して $f\vee g$, $f\wedge g$ をつぎのように定義する.

$$(f\vee g)(x)=\max(f(x),\ g(x)),\quad (f\wedge g)(x)=\min(f(x),\ g(x))$$

もちろん $f\vee g$, $f\wedge g$ は $C_0{}^R(T)$ に属する. さらに

$$f\vee g=\frac{1}{2}[f+g+|f-g|],\quad f\wedge g=\frac{1}{2}[f+g-|f-g|]$$

であるゆえ $f\vee g$, $f\wedge g\in\bar{A}$ である. いま $C_{0,R}(T)$ の任意の関数 h が A の中の関数で一様に近似されるのを示すために, T の任意の二点を x, y とする. x, y 二点において h の値と一致する $f_{x,y}\in A$ をみつけることは容易である. 任意の $\varepsilon>0$ に対して, そして固定した $y\in T$ に対してつぎのようにおく.

$$G_x=\{z\in T: h(z)-\varepsilon<f_{x,y}(z)\}\quad (x\in T).$$

そのとき G_x は T の中で開集合で x をふくむ. さらに h と $f_{x,y}$ は $C_{0,R}(T)$ の元であるから G_x の余集合はコンパクトである. このことから適当に有限個

の $G_{x_1}, G_{x_2}, \cdots, G_{x_n}$ を選べば，それらでTを被覆することができる．ここで

$$f_y = f_{x_1,y} \vee f_{x_2,y} \vee \cdots \vee f_{x_m,y}$$

とおけば $f_y \in \bar{A}$ で $f_y(y) = h(y)$ であり，T の任意の元 z で $F(z) - \varepsilon < f_y(z)$ となる．つぎに

$$H_y = \{z : f_y(z) < F(z) + \varepsilon\}$$

とおけば，H_y は開集合で y をふくむ．H_y の余集合もやはりコンパクトであるから有限個の $H_{y_1}, H_{y_2}, \cdots, H_{y_a}$ が存在して，それでTを被覆する．ここで

$$f = f_{y_1} \wedge f_{y_2} \wedge \cdots \wedge f_{y_n}$$

とおけば $f \in \bar{A}$ で，Tの任意の元 z で

$$h(z) - \varepsilon < f(z) < h(z) + \varepsilon$$

となる．いいかえれば $\|h - f\| < \varepsilon$ となったわけである．すなわち $h \in \bar{A}$ で $\bar{A} = C_{0,R}(T)$．さて $C_0(T)$ の場合はAが自己随伴なることを要する．Aが自己随伴ならばAの中の実関数全体を A_R とすれば，A_R は $C_{0,R}(T)$ の部分環でありTの点を強い意味で分離する．ゆえに A_R は $C_{0,R}(T)$ の中で稠密，したがってAは $C_0(T)$ で稠密となる． *qed*

系 3・20 Tをコンパクトとし，AをTの二点を分離する $C_R(T)$ の部分環とする．そのとき $\bar{A}$ は $C_R(T)$ に等しいか，$C_R(T)$ の一つの極大イデアルとなる．とくにAが定数関数をふくめば $\bar{A} = C_R(T)$ となる．同じ結果がAがTの上で自己随伴なら $C(T)$ でも成立する．

証明 AがTの点を強い意味で分離すれば，上の定理より $\bar{A} = C_R(T)$．もしそうでなければTの二点を分離するという仮定から $\{x \in T : \forall f \in A$ で $f(x) = 0\}$ は一点となる．それを x_0 とすれば $T - (x_0)$ は局所コンパクトで，Aは $C_{0,R}(T - (x_0))$ の部分環とみなすことができ，$\bar{A}$ は $C_R(T)$ の一つの極大イデアルなることは明らか． *qed*

3・3 空間 M_A の表現

可換環Aに対する空間 M_A，M_A^∞ は第1節で定義したが，ここではその複素平面のカルテシァン積 C^Λ の中への表現（第1節の中でも述べた）についてもう少し議論を進めていこう．

いま $\{\xi_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ を変数の一つの系とする．可換環 A に関するスカラー体

（A が実環，複素環に対しておのおの実数体，複素数体をとる）に係数をもつ $\{\xi_\lambda\}$ の多項式を考え，それら全体の集合を $\mathfrak{P}(\Lambda)$ で表わす．$\mathfrak{P}(\Lambda)$ は1つの環と考えられる．もし $P(\xi_{\lambda_1},\cdots,\xi_{\lambda_n})$ は $\xi_{\lambda_1},\cdots,\xi_{\lambda_n}$ の多項式である $\mathfrak{P}(\Lambda)$ の元であれば，$P(\xi_{\lambda_1},\cdots,\xi_{\lambda_n})$ の代りに $P(\{\xi_\lambda\})$ と書くことにする．そして $\mathfrak{P}(\Lambda)$ は Λ 個の変数に複素数を代入することにより，Λ 個の複素平面のカルテシャン積の上で定義された複素値連続関数からなる一つの環とみなすことができる．また $\mathfrak{P}_0(\Lambda)$ をもって定数係数が 0 である多項式全体を表わすことにすれば，これらは C^Λ の原点で0となるものの集りである．混乱がおこらない場合には $\mathfrak{P}(\Lambda)$，$\mathfrak{P}_0(\Lambda)$ の代りに $\mathfrak{P}$，$\mathfrak{P}_0$ と書くことにする．$\mathfrak{P}_0$ の元は C^Λ の二点を分離し，かつ C^Λ の位相はその $\mathfrak{P}_0$-位相（3·2 節A項）と同等なることは明らかなるゆえ定理 3·12 より C^Λ より $M^\infty_{\mathfrak{P}_0}$ の中への写像 $x\to\varphi_x$ は同相である．いま φ を $M^\infty_{\mathfrak{P}_0}$ の任意の元としたとき，$P_\lambda=\xi_\lambda$ とおき $\mu_\lambda=\hat{P}_\lambda(\varphi)$ とする．$\{\mu_\lambda\}$ は C^Λ の一つの元である．もしPを $\mathfrak{P}_0$ の任意の元としたとき $P(\{\mu_\lambda\})=\hat{P}(\varphi)$ となり，これから $x\to\varphi_x$ が $M^\infty_{\mathfrak{P}_0}$ の上への写像となり，その結果 C^Λ と $M^\infty_{\mathfrak{P}_0}$ とは同相である．さて Λ を今までと同じようにインデックスの集合とし $\{z_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ を Banach 環 A の任意の部分集合とする．$P(\xi_{\lambda_1},\xi_{\lambda_2},\cdots,\xi_{\lambda_n})$ を $\mathfrak{P}_0$ の任意の元とし $P(\{z_\lambda\})=P(z_{\lambda_1},z_{\lambda_2},\cdots,z_{\lambda_n})$ とかくことにすれば $P(\{z_\lambda\})$ はAの元となる．そして $P\to P(\{z_\lambda\})$ は $\mathfrak{P}_0$ からAの中への準同型写像である．その共役な写像 $\varphi\to\{z_\lambda(\varphi)\}$ は M^∞_A から C^Λ の中への標準写像である（3·1 節A項）．その写像による M_A または M^∞_A（A が単位元をもつか，もたないかにより）の C^Λ の中への像を $\{z_\lambda\}$ の**結合スペクトル**（joint spectrum）とよび $\sigma_A(\{z_\lambda\})$ と表わす［文献 26）参照］．その共役写像は連続なるゆえ $\sigma_A(\{z_\lambda\})$ は C^Λ の中のコンパクト部分集合である．明らかに $\sigma_A(\{z_\lambda\})$ は円板 $D_\lambda=\{\xi:|\xi|\leq r(z_\lambda)\}$ の積空間 Π の中に入っている．$\mathfrak{P}_0$ からAの中への準同型写像 $P\to P(\{z_\lambda\})$ の核 $\mathfrak{K}$ はもちろん $P(\{z_\lambda\})=0$ となる $P\in\mathfrak{P}_0$ 全体の集合である．もし $P\in\mathfrak{P}_0$ に対して $Z_P=\{\{\xi_\lambda\}\in C^\Lambda:P(\{\xi_\lambda\})=0\}$ とおけば，$\mathfrak{K}$ の $M^\infty_{\mathfrak{P}_0}$ の中における被 $h(\mathfrak{K})=\{\varphi\in M^\infty_{\mathfrak{P}_0}:\varphi(\mathfrak{K})=0\}$ は先ほどの $M^\infty_{\mathfrak{P}_0}$ と C^Λ との一対一対応 $\varphi_x\longleftrightarrow x$ によって C^Λ の上の集合 $Z=\cap\{Z_P:P\in\mathfrak{K}\}$ と見られる．このことから $\sigma_A(\{z_\lambda\})\subset Z\cap\Pi$ となる（定理 3·13 の証明より）．$\{z_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ が A の生成元になっているときは定理3·6 の証明よりこの共役写

像は M_A^∞ から $\sigma_A(\{z_\lambda\})$ の上の同相写像となるゆえ，この場合は $\sigma_A(\{z_\lambda\})=M_A^\infty$ としてよい．

定理 3・21 Aの生成元の系 $\{z_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ が A と一致すれば $M_A^\infty=Z$ となる．もしその生成元の系がそれ自身 A の部分環をなせば $M_A^\infty=Z\cap\Pi$ となる．

証明 もし生成元の系がA自身であれば，$P\to P(\{z_\lambda\})$ は $\mathfrak{P}_0$ から A の上への準同型写像となる．Z はこの準同型写像の核の被なるゆえ定理 3・13 により $M_A^\infty=Z$ となる．さてAの生成元の系 $\{z_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ が A の部分環 A_0 をなせば A_0 はAの中で稠密である．$\{\mu_\lambda\}$ を $Z\cap\Pi$ の中の任意の元とすれば，$\{\mu_\lambda\}\in Z$ なるゆえ写像 $Z_\lambda\to\mu_\lambda$ が A_0 から複素数体への一つの準同型になっていることは明らかである．さらに $\{\mu_\lambda\}\in\Pi$ なるゆえすべての $z_\lambda\in A_0$ で $|\mu_\lambda|\leqq\|z_\lambda\|$ となり，この準同型写像は A_0 の上で連続である．A_0 は A の中で稠密なるゆえ A 全体に拡張できる．それゆえ $\{\mu_\lambda\}\in M_A^\infty$ でこれは $Z\cap\Pi\subset M_A^\infty$ を示す．$M_A^\infty\subset Z\cap\Pi$ は前に示されたゆえ $M_A^\infty=Z\cap\Pi$ である． *qed*

この定理は M_A^∞ が複素平面のカルテシャン積の中の多項式の零点の集合として表わせることを示しているが，つぎに M_A^∞ の別な表現を考える．今後 $\|P\|$ によって A の中の元 $P(\{z_\lambda\})$ のノルムを表わし，$|P|$ によって $\max\{|P(\{\mu_\lambda\})|; \{\mu_\lambda\}\in\sigma_A(\{z_\lambda\})\}$ を表わすことにする．もちろん $|P|=r_A(P(\{z_\lambda\}))\leqq\|P\|$ （系 3・5）となる．

定理 3・22 Aの生成元の系 $\{z_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ に対して

$$M_A^\infty=\bigcap_{P\in\mathfrak{P}_0}\{\{\mu_\lambda\}\in C^\Lambda : |P(\{\mu_\lambda\})|\leqq\|P\|\}$$

証明 $\Phi_P=\{\{\mu_\lambda\}\in C^\Lambda : |P(\{\mu_\lambda\})|\leqq\|P\|\}$，$\Phi=\cap\{\Phi_P : P\in\mathfrak{P}_0\}$ とおけば $\Phi=M_A^\infty$ を証明すればよい．$M_A^\infty\subset\Phi$ は明らかなるゆえ $M_A^\infty\supset\Phi$ をいえばよい．$P\to P(\{z_\lambda\})$ なる準同型写像の核 $\mathfrak{R}$ の元 P では $\|P\|=0$ は明らかなるゆえ $\Phi\subset Z$ となる．つぎに $\{\mu_\lambda\}$ を M_A^∞ の中にない Φ の点とする．もし A_0 を $P\to P(\{z_\lambda\})$ なる写像の，$\mathfrak{P}_0$ のAの中の像とすればもちろん $\{\mu_\lambda\}\in M_{A_0}^\infty$ と見られる．A_0 はAの中で稠密なるゆえ，A_0 の準同型写像 $P(\{z_\lambda\})\to P(\{\mu_\lambda\})$ は連続であってはいけない．もし連続ならこの準同型写像は A 自身に拡張でき $\{\mu_\lambda\}\in M_A^\infty$ となり不合理．それゆえ $P\in\mathfrak{P}_0$ が存在して，$|P(\{\mu_\lambda\})|>\|P\|$ となり $\{\mu_\lambda\}\notin\Phi$．これは不合理．その結果 $M_A^\infty=\Phi$． *qed*

つぎに $C^{\varLambda}$ のどんな集合が可換 Banach 環の極大イデアル空間になるかについて Gelfand [文献 27)] の定理がある.

定理 3·23 $\varPhi$ を $C^{\varLambda}$ の部分集合としたとき, 生成元 $\{z_\lambda : \lambda\in\varLambda\}$ をもつ可換 Banach 環 A が存在して $\varPhi$ が標準写像 $\varphi\to\{\varphi(z_\lambda)\}$ による M_A^∞ の像になるための必十条件は $\varPhi$ はコンパクトで $C^{\varLambda}$ の原点をふくみ, かつ

$$\varPhi=\bigcap_{P\in\mathfrak{P}_0}\{\{\mu_\lambda\}\in C^{\varLambda}: |P(\{\mu_\lambda\})|\leqq|P|_\varPhi\}$$

となることである. ここで $|P|_\varPhi=\max\{|P(\{\mu_\lambda\})|;\ \{\mu_\lambda\}\in\varPhi\}$.

証明 必要性は前の定理で $||P||$ は $|P|_{M_A^\infty}$ に代えることができることから明らか. 十分性：求める可換 Banach 環として $\varPhi$ の上での $\mathfrak{P}_0$ の一様ノルムでの閉包をとる. A は $C^{\varLambda}$ の座標関数 z_α, すなわち $z_\alpha(\{\xi_\lambda\})=\xi_\alpha$ で生成されていて, $M_A^\infty\ni\varphi$ で $\varphi\to\{\varphi(z_\lambda)\}$ なる写像で M_A^∞ は $\varPhi$ に写されるる. *qed*

いま特に可換 Banach 環 A がただ一個の生成元をもつとする. それを z としたとき, $M_A^\infty\ni\varphi$ に対して $\hat{z}(\varphi)$ を対応させれば, M_A^∞ は複素平面のコンパクト集合とみなされるわけであるが, つぎの Šilov [文献 28)] はそのようなコンパクト集合をはっきりと特徴づける.

定理 3·24 複素平面 C の中の部分集合 $\varPhi$ が, 1 個の生成元をもつある可換 Banach 環 A で $\varPhi=M_A^\infty$ となるための必十条件は, $\varPhi$ がコンパクトで原点をふくみ, かつ C を分離しないこと, すなわち $C-\varPhi$ が連結なことである.

証明 必要なることは, M_A^∞ は明らかに C のコンパクト集合で原点をふくむ. さらに前定理と多項式に対する最大値定理より $\varPhi$ は C を分離しない. 十分なることは, $\varPhi$ の上の定数項なしの多項式全体の集合の一様収束に関する閉包を A とする. そのとき A は 1 つの Banach 環となるが, ここで A は関数 z から生成される. ここで $z(\xi)\equiv\xi$, $\xi\in\varPhi$ である. 証明すべきことは $\varPhi=\{\hat{z}(\varphi):\varphi\in M_A^\infty\}$ であるが, いま $\varPhi$ の上の複素値連続関数で原点で 0 となるものの全体を $C_0(\varPhi)$ とおけば, $C_0(\varPhi)\supset A$ で $\varPhi=M_{C_0(\varPhi)}^\infty$ となる. 定理 3·4 より $\sigma_{C_0(\varPhi)}(z)=\varPhi$. そして $\sigma_A(z)=M_A^\infty$, $\varPhi=\sigma_{C_0(\varPhi)}(z)$ が C を分離しないことと $C_0(\varPhi)\supset A$ であることから定理 1·26 より $\sigma_A(z)=\sigma_{C_0(\varPhi)}(z)$ となり, ゆえに $M_A^\infty=\varPhi$. *qed*

注意 多次元の場合も多項式に対して最大値原理が成り立つ*)から上の証明と同じく,

*) 一松信・多変数函数論, p. 6 (共立出版, 現代数学講座)

n 個の生成元をもつ環で，M_A^∞ は C^n の中でコンパクトで C^n の原点をふくみ，かつ C^n を分離しない．しかし逆にこのような条件をもつ C^n のコンパクト集合が，ある n 個の生成元をもつ環 A の M_A^∞ に一致することはでてこない．

さてこの後，環 A の極大イデアル空間 M_A は A の有限個の生成元をもつ部分環の極大イデアル空間によって，どの程度に表わされるかを考える．

A の生成元の系を $\{z_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ とする．Φ を C^Λ の任意の部分集合とし，Λ_1 を Λ の部分集合とするとき，Φ の C^{Λ_1} の中への射影は任意の $\lambda\in\Lambda_1$ に対して $\mu_\lambda'=\mu_\lambda$ となる $\{\mu_\lambda'\}\in C^\Lambda$ が存在するような $\{\mu_\lambda\}\in C^{\Lambda_1}$ の集合とする．この Φ の射影を $\Phi(\Lambda_1)$ とかくことにする．Λ の任意の部分集合 Λ_1 に対して $\{z_\lambda : \lambda\in\Lambda_1\}$ で生成された A の閉部分環を A_{Λ_1} で表わす．前のように $D_\lambda=\{\zeta : |\zeta|\leqq r(z_\lambda)\}$ のカルテシアン積を $\boldsymbol{\Pi}$ で表わす．

定理 3・25 Θ を C^Λ における開集合とし，M_A^∞ をふくむとする．そのとき Λ の中に有限部分集合 σ_0 が存在して，$\Lambda\supset\sigma\supset\sigma_0$ となる任意の σ に対して

$$M_A^\infty(\sigma)\subset M_{A_\sigma}^\infty\subset\Theta(\sigma)$$

となる．ここで $M_A^\infty(\sigma)$, $\Theta(\sigma)$ はおのおの上で示した記号 $\Phi(\Lambda_1)$ で $\Phi=M_A^\infty$, Θ, $\Lambda_1=\sigma$ になった場合を表わす．

証明 A_σ は A の部分環なるゆえ $M_A^\infty(\sigma)\subset M_{A_\sigma}^\infty$ は M_A^∞ から $M_{A_\sigma}^\infty$ の中への共役写像（3・1 節B項）を考えることにより明らかである．$\boldsymbol{\Pi}$ はコンパクトであり $M_A^\infty\subset\Pi\cap\Theta$ であるから定理 3・22 より $\mathfrak{P}_0$ にふくまれる有限個の多項式 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ が存在して

$$\Pi\cap\Phi_{P_1}\cap\Phi_{P_2}\cap\cdots\cap\Phi_{P_n}\subset\Theta,$$

ここで $\Phi_P=\{\{\mu_\lambda\} : |P(\{\mu_\lambda\})|\leqq\|P\|\}$ である．

σ_0 をもって $P_1, P_2, \cdots, P_n$ にでてくる z_λ のサフィクス λ の全体を表わす．さてもし $\sigma\supset\sigma_0$ ならば Φ_{P_i} の C^σ への射影はつぎの形となる．

$$\Phi_{P_i}(\sigma)=\{\{\mu_\lambda'\}\in C^\sigma;\ |P_i(\{\mu_\lambda'\})|\leqq\|P_i\|\}.$$

さらに

$$M_{A_\sigma}^\infty\subset\Pi(\sigma)\cap\Phi_{P_1}(\sigma)\cap\cdots\cap\Phi_{P_n}(\sigma).$$

ところで $\{\mu_\lambda'\}\in C^\sigma$ を $\{\mu_\lambda'\}\in\Pi(\sigma)\cap\Phi_{P_1}(\sigma)\cap\cdots\cap\Phi_{P_n}(\sigma)$ とし，その射影が $\{\mu_\lambda'\}$ となる $\boldsymbol{\Pi}$ の任意の元を $\{\mu_\lambda\}$ とすれば $\{\mu_\lambda\}\in\bigcap_i\Phi_{P_i}$ となることは明

らか．ゆえに

$$\Pi(\sigma)\cap\Phi_{P_1}(\sigma)\cap\cdots\cap\Phi_{P_n}(\sigma)\subset\Theta(\sigma).$$ qed

この定理はつぎのようにもっとくわしくできる．

定理 3·26 Θ を M_A^∞ をふくむ C^Λ の中の任意の開集合とする．そのとき Λ の中に有限部分集合 σ_0 が存在し，$\Lambda\supset\sigma\supset\sigma_0$ なる任意の有限集合 σ に対して有界閉代数的多面体*) $\Phi\subset C^\sigma$ が存在し，$\Phi\subset\Theta(\sigma)$ かつ $M_{A_\sigma}^\infty$ を Φ の内点の集合の中にふくむ．

証明 前定理の証明の中において $\Pi(\sigma)\cap\Phi_{P_1}(\sigma)\cap\cdots\cap\Phi_{P_n}(\sigma)$ は C^σ の中の閉代数的多面体で $\Theta(\sigma)$ にふくまれ $M_{A_\sigma}^\infty$ をふくむ．しかし $M_{A_\sigma}^\infty$ をその多面体の内点の集合の中にふくまなければならぬから少しその多面体の形を変えなければならない．まず $\Pi_1=\{\{\zeta_\lambda\}\in C^\sigma:|\zeta_\lambda|\leqq r_A(z_\lambda)+1,\ \lambda\in\sigma\}$ とおく．そのとき Π_1 は C^σ の中のコンパクト集合で $\Pi(\sigma)$ をその内点の集合の中にふくむ．つぎに k を正整数とし $\Phi_{P_i}{}^{(k)}=\{\{\zeta_\lambda\}\in C^\sigma:|P_i(\{\zeta_\lambda\})|\leqq\|P_i\|+1/k\}$ とおく．そのとき $\Phi_{P_i}{}^{(k)}$ はその内点の集合の中に $\Phi_{P_i}(\sigma)$ をふくむ．そして

$$\Gamma_k=(\Pi_1-\Theta(\sigma))\cap\bigcap_{i=1}^{n}\Phi_{P_i}{}^{(k)}$$

とおけば

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\Phi_{P_i}{}^{(k)}=\Phi_{P_i}(\sigma),\quad(\Pi_1-\Theta(\sigma))\cap\bigcap_{i=1}^{n}\Phi_{P_i}(\sigma)=\phi$$

それゆえ $\bigcap_{k=1}^{\infty}\Gamma_k=\phi$ で Γ_k はコンパクト，$\Gamma_{k+1}\subset\Gamma_k$ となるから，ある k_0 で $\Gamma_{k_0}=\phi$ となる．

$$\Phi=\Pi_1\cap\Phi_{P_1}{}^{(k^0)}\cap\cdots\cap\Phi_{P_n}{}^{(k_0)}$$

とおけばこれが定理を満たす多面体である． qed

定理 3·27 M_A^∞ が互いに共通点のない閉かつ開な有限個の集合 $\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_n$ の集合和になったとする．そのとき A の中に有限個の元で生成された部分環 A' が存在し，$M_{A'}^\infty$ は閉かつ開な集合 $\Phi_1',\Phi_2',\cdots,\Phi_n'$ の集合和となる．ここで M_A^∞ から $M_{A'}^\infty$ の中への共役写像 (3·1 節B項) での Φ_k の像が Φ_k' にふくまれる．

証明 $\{z_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ を A の生成元の系とする．M_A^∞ を C^Λ の中へ表現して考

*) 多項式 $P_1,\cdots,P_n$ で $\bigcap_{j=1}^{n}\{\{\lambda_i\}\in C^a:|P_j(\{\lambda_i\})|\leqq\alpha_j\}$ の形の集合．

える（この節の始めの部分）. M_A^∞ は C^A の中の互いに共通点のないコンパクト集合 $\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n$ の和であるから, $\Phi_k \subset \Theta_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$ で互いに共通点のない C^A の開集合 Θ_k が存在する. $\Theta=\bigcup_{k=1}^{n}\Theta_k$ とおきこの開集合 Θ に定理 3·25 を適用する. C^A の開集合 $\Theta_k(k=1, 2, \cdots, n)$ のおのおのは有限個の λ $(\in \Lambda)$ で定義されるから, それら全部の有限個の λ と定理 3·25 で求まる σ_0 をふくむ任意の σ に対して

$$M_A^\infty(\sigma)\subset M_{A_\sigma}^\infty\subset\Theta(\sigma).$$

ここで $\Phi_k'=M_{A_\sigma}^\infty\cap\Theta_k(\sigma)$. σ は $\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_n$ を定義する λ をふくむから

$$\Theta(\sigma)=\Theta_1(\sigma)\cup\cdots\cup\Theta_n(\sigma)$$

そして $\Theta_k(\sigma)$ は C^σ の中で互いに共通点がない. それゆえ Φ_k' は C^σ で互いに共通点のない閉集合となる. さらに $\Phi_k\subset\Theta_k$ なるゆえ $\Phi_k(\sigma)\subset\Theta_k(\sigma)$ で $\Phi_k(\sigma)\subset\Phi_k'$ である. ここで求まった A_σ を A' とおけばよい. qed

3・4 関数環のベクトル値準同型写像

Λ をインデックスの集合とする. $\mathfrak{P}$ を変数 $\{\xi_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ の多項式全体の集合とする. K を C^Λ の中の任意のコンパクト集合とし, K で決して 0 にならない $\mathfrak{P}$ の中の多項式全体の集合を $\mathfrak{P}_1$ とおく. $P\in\mathfrak{P}$, $Q\in\mathfrak{P}_1$ で有理関数 P/Q を作り, そのような関数全体の集合 $\mathfrak{R}(K)$ を K の上の**有理関数環**という.

A を単位元をもつ環とし, $\{z_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ を A の元の一つの集合とし $\sigma_A(\{z_\lambda\})\subset K$ と仮定する. P を $\mathfrak{P}$ の中の任意の多項式とし $P=\alpha+P_0$ とおく. ここで α は定数で P_0 は定数項をもたない多項式である. $P(\{z_\lambda\})$ で $\alpha+P_0(\{z_\lambda\})$ $(\in A)$ を表わすものとする. そのとき $P\to P(\{z_\lambda\})$ は $\mathfrak{P}$ から A の中への一つの準同型写像である. $Q\in\mathfrak{P}_1$ ならば任意の $\varphi\in M_A$ で $Q(\{z_\lambda(\varphi)\})\neq 0$ となる. これは $\sigma_A(\{z_\lambda\})\subset K$ から明らか. ゆえに定理 3·4 より $Q(\{z_\lambda\})^{-1}\in A$, なんとなれば $Q(\{\hat{z}_\lambda(\varphi)\})\neq 0$ より $\sigma(Q(\{z_\lambda\}))\not\ni(0)$ となり $Q(\{z_\lambda\})$ が正則となるからである. それゆえ $\tau: P/Q\to P(\{z_\lambda\})Q(\{z_\lambda\})^{-1}$ は $\mathfrak{R}(K)$ から A の中への準同型写像で, $f\in\mathfrak{R}(K)$ に対して

$$\widehat{\tau f}(\varphi)=f(\{\hat{z}_\lambda(\varphi)\})\quad(\varphi\in M_A)$$

ここで $\mathfrak{P}$ は $\mathfrak{R}(K)$ の部分環で, 上に定義した準同型写像は前に定義した $\mathfrak{P}$ から A への準同型写像 $P\to P(\{z_\lambda\})$ の拡張になっているわけである. また A が単

位をもたないときは K は C^A の原点 $\{0\}$ を含むと仮定し，$\mathfrak{R}(K)$ の代わりに $f(\{0\})=0$ となるような $\mathfrak{R}(K)$ の元の全体 $\mathfrak{R}_0(K)$ におきかえて考える．これは $\mathfrak{R}(K)$ から A_1（Aに単位元を添加してえられた環）への先ほどの準同型写像 τ の $\mathfrak{R}_0(K)$ の上へ縮小して考えたものになっている．

この後Kをn次元複素空間 C^n の中のコンパクト集合とする．一つの複素関数fがKの上で**解析的**であるといわれるのは，Kをふくむ一つの開集合Gが存在して，そのおのおのの連結成分の上でfはn変数複素関数として解析関数であるときにいう．Kの上の二つの解析関数がKをふくむある開集合の上で一致すれば，その二つの関数は同値といわれる．同値な解析関数でKの上の解析関数全体をクラス別けしたものを $\mathfrak{H}(K)$ とかくことにする．$f\in\mathfrak{H}(K)$ に対して f をKの上に縮小して考えたものを f_K とすれば写像 $f\to f_K$ は $\mathfrak{H}(K)$ から $C(K)$ への準同型写像となる．もしKの内点（C^n の位相における内点）全体の集合の閉包がKであれば，その写像は同型となる．

このあと $K\subset C^n$ の場合，先に考えた $\mathfrak{R}(K)$ から A への準同型写像 τ を $\mathfrak{H}(K)$ に拡張して見よう．まず $n=1$ のときから始める．

定理 3·28　A を単位元をもつ環とする．K を複素平面上のコンパクト集合とする．もしzをAの任意の元とし $\sigma_A(z)\subset K$ とすれば，$\mathfrak{H}(K)$ からAへの準同型写像 τ が存在してつぎが成立する．

$$\widehat{\tau f}(\varphi)=f(\hat{z}(\varphi))\qquad(\varphi\in M_A)$$

証明　$f\in\mathfrak{H}(K)$ とする．f の定義域は K をふくむ開集合なるゆえ，K をふくむある開集合Gが存在してGの閉包がfの定義域にふくまれる．そしてこの G の境界が有限個の Jordan 曲線からなっているものとする．これらの境界曲線は K のまわりを積分するに際し普通の方法で正の方向に方向がつけられているものとする．このように方向がつけられた境界をBで表わす．さて $\sigma(z)\subset K$ でBが有界なるゆえ，$f(\zeta)(\zeta-z)^{-1}$ は $B(\ni\zeta)$ からAへの関数として一様連続である．それゆえこのベクトル値関数の積分が定義できて，その積分の値（それを $f(z)$ とおく）はAにふくまれる．

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_B f(\zeta)(\zeta-z)^{-1}d\zeta$$

ここで $\tau f=f(z)$ とおけば，τ は環 $\mathfrak{H}(K)$ からAへの準同型写像となる（巻末

文献④, p. 568).

ここで $f(z)$ は

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{m} f(\zeta_k')\,(\zeta_k'-z)^{-1}(\zeta_k-\zeta_{k-1})$$

の形の A の元の列の極限(A のノルムでの)になっているから, 任意の $\varphi\in M_A$ で

$$\widehat{f(z)}(\varphi)=\frac{1}{2\pi i}\int_B f(\zeta)\,(\zeta-\hat{z}(\varphi))^{-1}d\zeta$$

となるが, 上の式の右辺は関数論から明らかなように $f(\hat{z}(\varphi))$ となる. すなわち任意の $\varphi\in M_A$ で $\widehat{\tau f}(\varphi)=f(\hat{z}(\varphi))$ となる. *qed*

さてつぎに n 次元の場合を考えるわけであるが, そのまえに Šilov [文献29)] の定理を証明しておこう.

定理 3·29 A を n 個の元 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ で生成されている単位元をもつ可換ノルム環とする. いま G を C^n の中の開集合とし, $G\supset\sigma(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ とする. そのとき G の上で解析的な任意の関数 $f(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n)$ に対して $w\in A$ が存在して

$$\hat{w}(\varphi)=f(\hat{z}_1(\varphi),\ \hat{z}_2(\varphi), \cdots, \hat{z}_n(\varphi)) \qquad (\varphi\in M_A)$$

証明 C^n の集合で $\{(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n);\ |P_j(\zeta_1,\ \zeta_2, \cdots, \zeta_n)|<1,\ j=1, 2, \cdots, m\}$ のような形のものを **Weil 領域**ということにする. ここで P_j は多項式を表わす. さて $\sigma(z_1,\ z_2, \cdots,\ z_n)$ は上のような Weil 領域のある族の共通部分となる(定理 3·22). いまそれを Weil 領域の族

$$G_\nu=\{(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n);\ |P_\nu(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n)|<1\}$$

の共通部分になっているとする. また $S=\sigma(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ は C^n の中の有界閉集合なるゆえ, 上のような Weil 領域のほかにもう n 個のつぎのような Weil 領域 Q_j をつけ加えておいてよい: ある $c_i>0$ で

$$Q_j=\left\{\left|\frac{1}{c_j}\zeta_j\right|<1\right\} \qquad (j=1, 2, \cdots, n)$$

ここで $\max\{|P_\nu(\zeta_1,\ \zeta_2, \cdots, \zeta_n)|,\ (\zeta_1,\ \zeta_2, \cdots, \zeta_n)\in S\}=m_\nu<1$ となるゆえ $m_\nu<\theta_\nu<1$ となる θ_ν を選び

$$F_\nu=\{(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n);\ |P_\nu(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n)|\leqq\theta_\nu\}$$

とおく. また $\max\{|\zeta_j|;\ (\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n)\in S\}<\alpha_j<c_j$ のような α_j をとり

$$S_j=\{|\zeta_j|\leqq\alpha_j\}$$

とおく．そのとき $S\subset F_\nu\subset G_\nu$, $S\subset S_j\subset Q_j$ なるゆえ

$$S=(\bigcap_\nu F_\nu)\cap(\bigcap_{j=1}^n S_j).$$

$S\subset G$ なることと S がコンパクトなることより，ある $F_{\nu i}(i=1,2,\cdots,m)$ で

$$S\subset(\bigcap_{i=1}^m F_{\nu_i})\cap(\bigcap_{j=1}^n S_j)\subset G.$$

当然

$$\bigcap_{i=1}^m\{|P_{\nu_i}(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)|<\theta_{\nu_i}\}\cap\bigcap_{j=1}^n\{|\zeta_j|<\alpha_j\}\subset G$$

ゆえに一つの Weil 領域 W で $S\subset W\subset G$ となるわけである．

いま便宜上，Weil 領域 W をつぎのように表わすこととする．

$$|P_\mu(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)|<1\qquad(\mu=1,2,\cdots,N)$$

ここで P_μ は $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n$ に関する多項式で $N\geqq n$ である．さて S_μ をつぎを満たす点の集まりとする．

$$|P_\mu(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)|=1$$

ここで $\sigma_{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n}=S_{\mu_1}\cap S_{\mu_2}\cap\cdots\cap S_{\mu_n}$ とし，それにある一定の方法で向きをつける．そのとき G の上で解析的な関数 f の W の点における値は，その関数の $\sigma_{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n}$ の上での値で決定されるという Weil の積分公式［文献 30), p. 292］がある．$S\subset W$ なるゆえ，その積分公式により $(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)\in S$ ならば

$$P_\mu(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)-P_\mu(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)=\sum_\nu(\zeta_\nu-\tau_\nu)Q_{\mu\nu}$$

としたとき（$Q_{\mu\nu}$ は $(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)$ を固定したとき $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n$ の多項式）つぎのようにおく．

$$D_{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n}=\det||Q_{\mu_t j}||_{t,j=1,2,\cdots,n}.$$

そのとき G の上で解析的な任意の関数 $f(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)$ に対して

$$f(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^n}\sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_n)}\int_{\sigma_{i_1,i_2,\cdots,i_n}}\frac{D_{i_1,i_2,\cdots,i_n}f(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)d\zeta_1,d\zeta_2,\cdots,d\zeta_n}{\prod_{\nu=1}^n[P_{i_\nu}(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)-P_{i_\nu}(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)]}$$

この和はインデックス $i_1,i_2,\cdots,i_n$ のすべての組合せに対して行なわれる．

さて点 $(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n)$ が $\sigma_{i_1, i_2, \cdots, i_n}$ に属するとき $P_{i_\nu}(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n) - P_{i_\nu}(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n)$ は決して0にならない（$(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n) \in S$ なるゆえ）から定理 3·4 より

$$[P_{i_\nu}(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n) - P_{i_\nu}(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n)]^{-1}$$

はAの一つの元に対応する．すなわち $a \in A$ が存在して上の式の値は $\hat{a}(\varphi)$ に等しい．ここで $\varphi \in M_A$ は $\hat{z}_i(\varphi) = \tau_i (i=1, 2, \cdots, n)$ となるものである．そのaは $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n$ に連続的に従属することも明らかである．上にあげた Weil の積分公式により，このaに $D_{i_1, i_2, \cdots, i_n} f(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n)$ をかけて積分することにより，ベクトル値積分を考えれば $w \in A$ が存在して $\hat{w}(\varphi) = f(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n)$（$\varphi$ は任意の M_A の元で $\hat{z}_i(\varphi) = \tau_i \quad (i=1, 2, \cdots, n)$）となりこの定理は証明された． *qed*

さて $\mathfrak{H}(K)$ からAへの準同型写像の問題で，n次元の場合をつぎに考えよう．上の Šilov の定理の証明が応用される．Kを C^n の中の任意のコンパクト集合とする．

定理 3·30 Aを半単純 Banach 環で単位元をもつとし，$z_1, z_2, \cdots, z_n$ をAのn個の元で $\sigma_A(z_1, z_2, \cdots, z_n) \subset K$ であると仮定する．そのとき $\mathfrak{H}(K)$ からAの中への準同型写像τが存在してつぎが成り立つ．

$$\widehat{\tau f}(\varphi) = f(\hat{z}_1(\varphi), \hat{z}_2(\varphi), \cdots, \hat{z}_n(\varphi)) \qquad (\varphi \in M_A)$$

証明 $f \in \mathfrak{H}(K)$ とする．上の Šilov の定理を用いるわけであるが，直接には適用できないので次元を上げることを考える．いま $\{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$ をふくむようなAの生成元の系 $\{z_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ を考える．$\sigma_n = (1, 2, \cdots, n)$ とする．C^Λ の元で，その C^n への射影がfの定義域にふくまれるようなもの全体の集合をΘで表わす．Θはもちろん C^Λ の中の開集合であり $\Theta(\sigma_n)$ はfの定義域に一致する．仮定より $\sigma(z_1, \cdots, z_n) \subset K$ なるゆえ，生成元 $\{z_\lambda\}$ による M_A の C^Λ の中への標準写像（3·1 節A項）での像はΘにふくまれる．ここで定理 3·26 を用いれば，Λ の有限集合σと C^σ の中の有界閉代数的多面体 Φ が存在して，$\Phi \subset \Theta(\sigma)$ で，かつ M_{A_σ} はΦの内点の集合にふくまれる．ここで $\sigma \supset \sigma_n$ と仮定してもよいから，$\sigma = (1, 2, \cdots, n, n+1, \cdots, p)$ とおく．M_{A_σ} はΦの内点の集合の中にふくまれるからもちろん $M_A(\sigma) = \sigma(z_1, \cdots, z_p)$ も Φ の内点の集合の中にふくまれる．さて $C^p \to C^n$ なる射影で $\Theta(\sigma)$ はfの定義域にうつるから，f

は $\Theta(\sigma)$ のおのおのの連結成分の上で解析的な p 変数の関数とみなすことができる．そして上の Šilov の定理をこの f に対して適用すれば，$w=f(z_1,\cdots,z_n)\in A$ が存在して

$$\hat{w}(\varphi)=f(\hat{z}_1(\varphi),\hat{z}_2(\varphi),\cdots,\hat{z}_n(\varphi)) \qquad (\varphi\in M_A)$$

ここでこの w は実は $\sigma=(1,2,\cdots,p)$ の選び方に関係していて一意とはいえない．しかしすぐわかるように $\hat{w}(\varphi)$ の値はKにおけるfの値のみに関係する．仮定よりAは半単純であるから $w=f(z_1,\cdots,z_n)$ は σ に関係なく f により一意に定ってしまう．ここで $f\to f(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ は $\mathfrak{H}(K)$ からAへの準同型写像で，$\mathfrak{H}(K)$ の単位元はAの単位元へうつり，$f_k(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)\equiv\zeta_k$ となる関数 f_k は z_k にうつることは明らかである． qed

つぎにAが単位元をもたない場合を考える．結合スペクトル $\sigma(z_1,\cdots,z_n)$ の定義（この節の始め）によれば，Aが単位元をもたないときは $\sigma(z_1,\cdots,z_n)$ は共役写像による M_A^∞ の C^n の中への像であった．それゆえ $\sigma(z_1,\cdots,z_n)$ は必然的に C^n の原点をふくむことになる．いま C^n の原点0をふくむ C^n のコンパクト集合をKとするとき，$\mathfrak{H}_0(K)$ を $f(0)=0$ となる $\mathfrak{H}(K)$ の中の関数 f の全体からなる環とする．このとき単位元をもつ，もたないにかかわらずつぎの定理が成立する．

定理 3·31 Aを半単純環とし，$z_1,z_2,\cdots,z_n$ をAの n 個の元とし $\sigma(z_1,z_2,\cdots,z_n)\subset K$ とする．ここでKは C^n の原点0をふくむと仮定する．そのとき $\mathfrak{H}_0(K)$ からAの中への準同型写像 τ が存在してつぎが成り立つ．

$$\widehat{\tau f}(\varphi)=f(\hat{z}_1(\varphi),\hat{z}_2(\varphi),\cdots,\hat{z}_n(\varphi)) \qquad (\varphi\in M_A^\infty)$$

証明 Aが単位元をもつときは，求める準同型写像 τ は前の定理で求めた τ を $\mathfrak{H}_0(K)$ の上に縮小したものにほかならない．つぎにAが単位元をもたない場合に考える．A_1 をAに単位元を添加してできた環とする．ここで結合スペクトルの定義から $\sigma_A(z_1,z_2,\cdots,z_n)=\sigma_{A_1}(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ となることは容易にわかる．それゆえ前の定理により $\mathfrak{H}(K)$ から A_1 の中への準同型写像 τ_1 が存在して，$\widehat{\tau_1 f}(\varphi)=f(\hat{z}_1(\varphi),\ \hat{z}_2(\varphi),\cdots,\hat{z}_n(\varphi))$ $(\varphi\in M_A)$ となる．求める τ は τ_1 の $\mathfrak{H}_0(K)$ の上への縮小である．なんとなれば任意の $f\in\mathfrak{H}_0(K)$ に対して $\widehat{\tau f}(\varphi)=f(\hat{z}_1(\varphi),\cdots,\hat{z}_n(\varphi))$ $(\varphi\in M_{A_1})$ となるが，任意の $\varphi'\in M_A^\infty$ に対して $\varphi(x+\alpha)=\varphi'(x)+\alpha$ とおけば $\varphi\in M_{A_1}$ であり，$z\in A$ に対して $\varphi(z)=\varphi'(z)$

となる．いま $\tau f=a+\gamma(a\in A,\gamma$：スカラー) とおけば $\hat{a}(\varphi')+\gamma=f(\hat{z}_1(\varphi'),\cdots,\hat{z}_n(\varphi'))$ $(\varphi'\in M_A^\infty)$ となり，とくに $\varphi'\equiv 0$ とおけば $\gamma=f(0,0,\cdots,0)=0$ となる．これは $f\in\mathfrak{H}_0(K)$ なら $\tau f\in A$ なることを示し，このことから τ が求めるものであることがわかった． *qed*/

3・5 直　和　分　解

A を複素可換 Banach 環とする．e を 0 でない A のベキ等元 $(e^2=e)$ とする．そのとき $A=A(1-e)+Ae$ は A を二つのイデアル $A(1-e)$，Ae に直和分解したことになる．つぎの定理 3・32 はその逆を証明している．また A の直和分解は空間 M_A を閉かつ開な二つの集合に分解する問題と密接に関係する．それらの関係は定理 2・34，定理 2・35 などでも見られたが，以下それについて考える．

定理 3・32　A が二つの (0) でない A のイデアル I_1，I_2 の直和となり，かつ I_1 はモジュラーイデアルとする．そのとき A に巾等元 e が存在して，$I_1=A(1-e)$，$I_2=Ae$ となる．また $h(I_1)$ は M_A の中のコンパクト開集合となる．

証明　A は I_1 と I_2 の直和 $I_1\oplus I_2$ になったとすれば，I_2 は A/I_1 と同型となる．I_1 はモジュラーなるゆえ A/I_1 は単位元をもつから，I_2 の中にベキ等元 e が存在して任意の $a\in I_2$ に対して $ae=a$ となる．これから $I_2=Ae$ となることは明らか，ゆえにまた $I_1=A(1-e)$ となる．ここで $h(I_1)=\{\varphi\in M_A:\hat{e}(\varphi)=1\}$，$h(I_2)=\{\varphi\in M_A:\hat{e}(\varphi)=0\}$ となる．なんとなれば $e^2=e$ なることからすべての $\varphi\in M_A$ で $\hat{e}(\varphi)=0$ または 1．$M_A=h(I_1)\cup h(I_2)$，$h(I_1)\cap h(I_2)=\phi$，$I_2\ni e$ となることから明らかである (定理 2・34，2・35)．$\hat{e}$ は連続であるから $h(I_1)$ は M_A のコンパクト開集合である． *qed*/

この定理の後の部分の逆がつぎの Šilov [文献 29)] の定理である．

定理 3・33　$\mathfrak{E}$ を M_A の任意の空でないコンパクト開集合とするとき A の 0 でないベキ等元 e が存在して $\mathfrak{E}=\{\varphi\in M_A:\hat{e}(\varphi)=1\}$ となる．

証明　まず A を半単純環と仮定する．そして $\mathfrak{E}_0=M_A^\infty-\mathfrak{E}$ とおく．そのとき M_A^∞ は二つの互いに共通点のない閉集合 $\mathfrak{E}_0$ と $\mathfrak{E}$ との和となり $\mathfrak{E}_0\ni\varphi_\infty$ である．定理 3・27 より A の中に有限個の元 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ が存在して，それらで生成された A の部分環 B で $M_A^\infty=\mathfrak{E}_0'\cup\mathfrak{E}'$ となる．ただし $\mathfrak{E}_0'$ と $\mathfrak{E}'$ は

M_A^∞ の中の共通点のない閉集合であり，M_A^∞ から M_B^∞ の中への共役写像 (3·1 節 A 項) は $\mathfrak{E}^0$ を $\mathfrak{E}_0'$ の中へ $\mathfrak{E}$ を $\mathfrak{E}'$ の中へ写す．いま $K=\{(\hat{z}_1(\varphi), \hat{z}_2(\varphi), \cdots, \hat{z}_n(\varphi));\ \varphi\in M_B^\infty\}$ とすれば $K\subset C^n$ となり，前にも述べたように (3·1 節) K と M_B^∞ を同一視でき，$K=\mathfrak{E}_0'\cup\mathfrak{E}'$ となる．さて定理 3·31 より $\mathfrak{H}_0(K)$ から B の中への準同型写像 $f\to f(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ が存在する．$\mathfrak{H}_0(K)$ の定義より $\mathfrak{E}_0'$ の一つの近傍の上で 0，$\mathfrak{E}'$ の一つの近傍の上で値 1 をとる関数 h は $\mathfrak{H}_0(K)$ にふくまれ，$\mathfrak{H}_0(K)$ の中でベキ等元となっている．それゆえ h の B の中への像 $e=h(z_1, \cdots, \hat{z}_n)$ はやはり B のベキ等元になる．また $\hat{e}(\varphi')=h(\hat{z}_1(\varphi'), \hat{z}_2(\varphi'), \cdots, \hat{z}_n(\varphi'))$ $(\varphi'\in M_B^\infty)$ が成立することから $\hat{e}(\mathfrak{E}_0')=0, \hat{e}(\mathfrak{E}')=1$ がわかる．ゆえにまた $\mathfrak{E}=\{\varphi\in M_A;\ \hat{e}(\varphi)=1\}$ となり A が半単純の場合には定理は証明された．つぎに A が半単純でないならば，A の根基 R で $A'=A/R$ とおけばもちろん A' は半単純となりまた $M_{A'}^\infty=M_A^\infty$ である．なんとなれば R は任意の極大モジュラーイデアルにふくまれるからである (2·3 節)．それゆえ上の半単純の場合の結果より $e'\in A'$ が存在して，$\mathfrak{E}_1=\{\varphi_1\in M_{A'}^\infty;\ \varphi'(\hat{e}_1)=1\}$．ここで $\mathfrak{E}_1$ は $M_{A'}^\infty$ と M_A^∞ の一対一対応による $\mathfrak{E}$ に対応した M_A^∞ の集合．ところで $M_{A'}^\infty$ と M_A^∞ との一対一対応は $\varphi_1\longleftrightarrow\varphi:\hat{x}'(\varphi_1)=\hat{x}(\varphi)$ $(x\in A)$ であるから $\mathfrak{E}=\{\varphi\in M_A^\infty;\hat{e}(\varphi)=1\}$ となる．ここで $e'=e+R$ とする．さて e' は A' のベキ等元であるが e を A のベキ等元にすることができる．なんとなれば e が A のベキ等元でなければ $e-e^2\in R$ なるゆえ $e-e^2=r$ とおく．$r\in R$ なるゆえ $(4r)^\circ$ が存在し (定理 2·17)，したがって $r(1-4r)^{-1}=r(1-(4r)^\circ)\in R$．ところで $q^2-q-r(1-4r)^{-1}=0$ となる $q\in R$ が存在するから*)，$e_1=e-(2e-1)q$ とおいたとき e_1 はベキ等元 $(e_1{}^2=e_1)$ となる．ここで $e'=e_1+R$ となるので証明は完了した． qed

定理 3·34 Aを複素可換 Banach 環とし，M_A は互いに共通点がない有限個の閉集合 $\Phi_0, \Phi_1, \cdots, \Phi_n$ の集合和であり，$\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n$ はコンパクトであるとする．そのときAの閉イデアル $I_0, I_1, \cdots I_n$ が存在して $A=I_0\oplus I_2\oplus\cdots\oplus I_n$ でかつ $M_{I_k}=\Phi_n(k=0, 1, \cdots, n)$ となる．

証明 上の定理より $k=1, 2, \cdots, n$ に対して $e_k\in A$ が存在して $\hat{e}_k(\Phi_k)=1$,

---

*) $s=r(1-4r)^{-1}\in R$ としたとき $r_A(-4s)=0$ なるゆえ (定理 2·17)，$-1/2\sum_{k=1}^{\infty}\binom{1/2}{k}(-4s)^k$ が R の一つの元 q に収束する．$1-\sqrt{1-4s}=2q$ なることから $q^2-q+s=0$．

$\hat{e}_k(\varphi)=0\ (\varphi\notin\Phi_k)$. ここで $e=e_1+e_2+\cdots+e_n$ とおき $I_0=A(1-e)$, $I_k=Ae_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$ と定義すれば，これらのイデアル I_k は閉となりかつ $A=I_0\oplus I_1\oplus\cdots\oplus I_n$ となる．なんとなれば $k=1,2,\cdots,n$ に対しては $I_k=Ae_k$ なるゆえ $a_ne_k\to b$ なら $a_ne_k\to be_k$ (e_k はベキ等元)．ゆえに $b=be_k\in I_k$ となり I_k は閉イデアル．また $A=I_0\oplus(I_1\oplus\cdots\oplus I_n)$ で I_0 はモジュラーなるゆえ定理 3・32 よりあるベキ等元 e_0 で $I_0=A(1-e_0)$ となり，I_0 も閉イデアルとなることがわかる．最後に $h(I_k)=M_A-\Phi_k$ なることが容易にわかるから $M_{I_k}=M_A-h(I_k)^{*)}=\Phi_k$ となる．　*qed*

定理 3・35　Aが半単純可換 Banach 環とする．そのとき M_A がコンパクトとなる必十条件はAが単位元をもつことである．

証明　Aが実環であるときその複素環拡大を A_C とすれば M_A と M_{A_C} との間には同相写像が存在し（定理 3・3），またAが単位元をもつことと A_C が単位元をもつことは同等である．ゆえにAが複素環の場合だけを考えればよいことになる．もしAが単位元をもつときは M_A はコンパクトであることはAが半単純でなくてもすでに証明されている（系 3・9）．逆に M_A がコンパクトとすれば定理 3・33 よりAの中にベキ等元 e が存在して，すべての $\varphi\in M_A$ に対して $\hat{e}(\varphi)=1$ となる．ゆえに任意の $a\in A$ に対してすべての $\varphi\in M_A$ で $(a-ae)^\wedge(\varphi)=0$. これは $a-ae$ がAの根基にふくまれることを意味し，Aの半単純性から $a=ae$. すなわち e はAの単位元となる．　*qed*

注意　この定理でAの半単純性が必要であることをつぎに示す．A_1 を単位元をもつ半単純 Banach 環で，A_2 を根基 Banach 環（2・3 節）とする．そしてAを $(a,\ x)$, $a\in A_1$, $x\in A_2$ の全体とする．Aは

$$(a,x)+(b,y)=(a+b,\ x+y),$$
$$\alpha(a,x)=(\alpha a,\alpha x)\ (\alpha:\text{スカラー}),$$
$$(a,x)(b,y)=(ab,xy)$$

と定義すれば環となり，Aのノルムを

$$\|(a,x)\|=\|a\|+\|x\|$$

で定義すれば一つの Banach 環となる．Aの根基は明らかに A_2 であるから，すなわち $\{(0,x)\,;\ x\in A_2\}$ であるから $M_A=M_{A_1}$ となりその結果 M_A はコンパクトになる．しかしAは単位元をもたない（根基環は単位元をもたない）．

---

*) $\varphi\in M_A-h(I_k)$ に対して，A の準同型写像 φ を I_k に縮小したものを $\varphi'(\in M_{I_k})$ とおけば $\varphi\to\varphi'$ なる写像は $M_A-h(I_k)$ から M_{I_k} の上への同相写像であることは容易に証明される．

定理 3·36 M_A の中の被集合 Φ がコンパクトになる必十条件は $k(\Phi)$ がモジュラーイデアルとなることである.

証明 $A'=A/k(\Phi)$ とおけば, $M_{A'}=h(k(\Phi))=\Phi$ (定理 2·33). また Φ は被集合なることから A' は半単純となる. 前の定理より Φ がコンパクトとなる必十条件は A' が単位元をふくむことであり, それはまた $k(\Phi)$ がモジュラーとなることと同等である (2·1 節). qed

定理 3·37 I を可換 Banach 環 A のイデアルとし, Φ を $h(I)$ と共通点をもたないコンパクトである被集合とする. そのとき $a\in I$ が存在して $\hat{a}(\Phi)=1$ となる.

証明 上の定理より $k(\Phi)$ はモジュラーイデアル. また Φ は被集合なるゆえ $h(k(\Phi))=\Phi$. $k(\Phi)$ はモジュラーなるゆえ当然イデアル $I+k(\Phi)$ もモジュラーとなる. ここで $\Phi=h(k(\Phi))$ と $h(I)$ が共通点をもたないという仮定より定理 2·35 を用いて $A=I+k(\Phi)$ が結論される. u を任意の $\varphi\in\Phi$ に対して $\hat{u}(\varphi)=1$ となる A の元としたとき (前定理よりその存在は明らか), u を I と $k(\Phi)$ との元の和に表わしたとき : $u=a+b$, $a\in I$, $b\in k(\Phi)$ とおいたとき, 任意の $\varphi\in\Phi$ で $\hat{a}(\varphi)=1$ となる. qed

系 3·38 Φ_0, Φ_1 を M_A の共通点のない二つの被集合とし, Φ_1 をコンパクトとする. そのときある $a\in A$ が存在して, $\hat{a}(\Phi_0)=0$, $\hat{a}(\Phi_1)=1$ となる.

証明 Φ_0 は被集合なるゆえ $\Phi_0=h(k(\Phi_0))$. $k(\Phi_0)$ を I とおけば Φ_1 と $h(I)$ とは共通点をもたない. 上の定理よりある $a\in I$ が存在して $\hat{a}(\Phi_1)=1$. ここで $a\in I=k(\Phi_0)$ なるゆえ $\hat{a}(\Phi_0)=0$ となる. qed

定義 環 A が**局所単位元** (local identities) をもつといわれるのは, 任意の $\varphi\in M_A$ に対して, ある $a\in A$ が存在して φ のある近傍 U で $\hat{a}(U)=1$ となるときとする. もし A が A の根基を法とする単位元をもつならば当然 A は局所単位元をもつことになる.

つぎは A が局所単位元をもつための一つの必十条件である.

定理 3·39 A が局所単位元をもつための必十条件は任意の $\varphi\in M_A$ に対して φ の近傍 V が存在して $k(V)$ がモジュラーイデアルとなることである.

証明 もし $k(V)$ がモジュラーならば $A/k(V)$ は単位元をもつ. $M_{A/k(V)}=h(k(V))\supset V$ なるゆえ, ある $a\in A$ が存在して $\hat{a}(V)=1$ となる. 逆に φ

の近傍Vで $\hat{a}(V)=1$ とする．そのとき $I=A(1-a)$ と定義する．そのときIはモジュラーイデアルなることは明らかでかつ，$I\subset k(V)$ なるゆえ $k(V)$ もまたモジュラー．　qed

Aが局所単位元をもつとき，定理 3·36 はつぎのようになる．

定理 3·40　Aを局所単位元をもつとする．そのとき M_A の中の任意の閉集合Φがコンパクトである必十条件は $k(\Phi)$ がモジュラーイデアルなることである．

証明　もし $k(\Phi)$ がモジュラーならば $A/k(\Phi)$ は単位元をもつ．それゆえ $h(k(\Phi))=M_{A/k(\Phi)}$ はコンパクトとなり，当然 $\Phi\subset h(k(\Phi))$ もコンパクトとなる．逆にΦをコンパクトと仮定する．前の定理よりΦ の各点φに対してφの近傍Vが存在して $k(V)$ はモジュラー．Φ のコンパクト性よりΦは有限個の上のような近傍の和にふくまれる．それを $V_1, V_2, \cdots, V_n$ とすれば $\Phi\subset V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_n$ であるから $k(\Phi)\supset k(V_1)\cap\cdots\cap k(V_n)$．ここでモジュラー・イデアルの有限個の共通集合はモジュラー（定理 2·1）なるゆえ $k(\Phi)$ もモジュラーである．　qed

定理 3·41　Φを M_A の一つの被集合とし，$a\in A$ を任意の $\varphi\in\Phi$ に対して $|\hat{a}(\varphi)|\geqq\delta>0$ であると仮定する．そのとき $k(\Phi)$ はモジュラーで，かつ $A\ni b$ が存在してΦの任意の元φに対して $(ab)^\wedge(\varphi)=1$ となる．

証明　$A'=A/k(\Phi), a'=a+k(\Phi)$ とおく．任意の $\varphi\in M_{A'}$ に対して $|\hat{a}'(\varphi)|\geqq\delta>0$ となる．$\delta>\eta>0$ となるηをとる．いま w_j を1のn乗根とし，$\eta_j=\eta w_j$　$(j=1,2,\cdots,n)$ とする．定理 1·19 の証明のように

$$(\eta^{-n}a'^n)^\circ=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\eta^{-1}a')^\circ$$

ところで $(\zeta^{-1}a')^\circ$ は円 $|\zeta|=\eta$ の上で一様連続であるから，上の式を Riemann 積分のように考えれば $\lim_{n\to\infty}(\eta^{-n}a'^n)^\circ$ が存在することになるからそれをe' とおく．$u_n'=(\eta^{-n}a'^n)^\circ$ とおけば

$$\hat{u}_n'(\varphi)=\frac{\eta^{-n}\hat{a}'(\varphi)^n}{\eta^{-n}\hat{a}'(\varphi)^n-1}\qquad(\varphi\in M_{A'})$$

これから

$$\hat{e}'(\varphi)=\lim_{n\to\infty}\hat{u}_n'(\varphi)=1\qquad(\varphi\in M_{A'})$$

それゆえ e' は A' の根基を法とした単位元となる．ところで $k(\Phi)$ は被集合なるゆえ A' は半単純．ゆえに e' は A' の単位元となるから $k(\Phi)$ はモジュラー．また任意の $\varphi\in M_{A_1}$ で $\hat{a}'(\varphi)\neq 0$, かつ A' は単位元をもつから，a' は A' の中で逆元 b' をもつ．それゆえに $b\in A$ が存在して $(\widehat{ab})(\varphi)=1(\varphi\in\Phi)$. qed

3·6 完全正則可換 Banach 環

Šilov が可換環のとき正則環 (regular algebra)*) なるものを導入したが，非可換の場合もふくめて，それを完全正則環という．それは Neumann の正則環と区別をするためと，可換環の場合，完全正則空間の条件に似た性質をもつからである（定理 3·45）．始めに一般の完全正則環の二，三の性質を述べ，その後可換環の場合を考える．

定義 環 A が完全正則であるとは，つぎの二つの条件を満たすときである．

（i） A の構造空間 $M_S(A)$ は Hausdorff 空間となる．

（ii） $M_S(A)$ の任意の点は $k(V)$ がモジュラーとなる近傍 V をもつ．

条件（ii）は A が単位元をもつならば満たされる．これは $V=M_S(A)$ とおけばよい．また定理 2·31 より $hk(V)(\supset V)$ がコンパクトとなり，その結果（ii）の条件から空間 $M_S(A)$ は局所コンパクトとなっている．

完全正則環の例としては，局所コンパクト Hausdorff 空間 Ω の上の無限遠点で 0 となる複素関数全体の環 $C_0(\Omega)$ や局所コンパクト Abel 群 G の上の群環 (group algebra) $L^1(G)$ などがある．

定理 3·42 I を完全正則環（可換とは限らない）の両側イデアルとする．そのとき環 A/I, I はともに完全正則となる．

証明 定理 2·33 より上の定義の（ii）だけが満たされることを証明すればよい．さて M を $h(I)$ の任意の元とすれば，A が完全正則なるゆえ $k(V)$ がモジュラーとなるような $M_S(A)$ の点 M の近傍 V が存在する．$k(V)\subset k(V\cap h(I))$ なるゆえ $k(V\cap h(I))$ もまたモジュラーとなる．定理 2·34 より $h(I)$ から $M_S(A/I)$ の上への同相写像が存在するが，その写像による $V\cap h(I)$ の $M_S(A/I)$ の中への像を V' とすれば $k(V')=k(V\cap h(I))/I$ なるゆえ $k(V')$ は A/I の中のモジュラーイデアルとなる．これは A/I が完全正則

*) 功力・井関・笠原：関数解析入門 I，共立全書 p. 214.

なることを示している. *qed*

さてつぎに M を $M_S(A)-h(I)$ の任意の点とする. そのとき $M_S(A)$ の中での点 M の近傍 V でその閉包が $h(I)$ と共通点がなく, かつ $k(V)$ がモジュラーであるものが選べる. V' を定理 2・33 における $M_S(A)-h(I)$ から $M_S(I)$ の上への同相写像における V の像とする. そのとき $k(V')=k(V)\cap I$ でかつ $h(k(V))\cap h(I)=\phi$. $k(V)$ がモジュラーなるゆえ, I は $k(V)$ を法とした A の単位 e をふくむ. なんとなれば定理 2・35 より $k(V)+I=A$ となるから, 法 $k(V)$ に関する A の単位 u に対して $u=a+e$, $a\in k(V)$, $e\in I$ となる. $e-u=-a\in k(V)$ から e は $k(V)$ を法とする A の単位で $e\in I$ となる. ゆえに $I(1-e)\subset k(V)\cap I$, $(1-e)I\subset k(V)\cap I$, $k(V')=k(V)\cap I$ なるゆえ $k(V')$ は I のモジュラーイデアルとなる.

定理 3・43 A_1 を, 単位元をもたない環 A に単位元を添加してできた環とする (1・1 節B項). A_1 が完全正則となることと A が完全正則なることは同等である.

証明 もし A_1 が完全正則なら A が A_1 の中の両側イデアルであるから前定理より A も完全正則となる. 逆にいま A が完全正則だとする. 定理 2・33 より $M_S(A)$ は $M_S(A_1)-\{A\}$ と同相となる. ここで $\{A\}$ は A_1 の極大イデアルとしての A 一点を表わす. $M_S(A)$ が Hausdorff 空間なることから $M_S(A_1)$ が Hausdorff 空間なることをいうには一点 $\{A\}$ でそれが証明できるかどうかを確かめればよい. $M_0'\in M_S(A_1)$, $M_0'\neq A$ としたとき $M_0=M_0'\cap A$ とおく. そのとき $M_0\in M_S(A)$ であるから, M_0 の近傍 V が存在して $k(V)$ が A のモジュラーイデアルとなる. $k(V)$ がモジュラーであるから $k(V)$ を法とする A の単位元 e が存在する. ここで $J=k(V)+A_1(1-e)$ とおけば J は A_1 の両側イデアルであるが, それは A にふくまれていないことは明らか. それゆえ J の $M_S(A_1)$ における被 $h'(J)$ には A はふくまれない. それゆえ $M_S(A_1)-h'(J)$ は $\{A\}$ の近傍となる. さて $M\in V$ とし M の $M_S(A_1)$ への像を M' とすれば $M=M'\cap A$ で $M'=M+A_1(1-e)$ となる. $M\supset k(V)$ なるゆえ $M'\supset J$. いいかえれば V の $M_S(A_1)$ の中への像 V' は $h'(J)$ にふくまれる. それゆえ $M_S(A_1)$ における $\{A\}$ の近傍 $M_S(A_1)-h(J)$ と M_0' の近傍 V' とは共通点がなく, したがって $M_S(A_1)$ は Hausdorff 空間となる. また A_1 は単位元を

もつゆえ完全正則の定義の中の条件（ii）は満たされる．　*qed*

このあと可換環の場合に考える．可換環の場合は $M_S(A)$ は M_A になるからAが完全正則であるとは，つぎの二つの条件を満たすときである．

（i）　M_A は $h-k$ 位相で Hausdorff 空間となる．

（ii）　M_A の任意の元は $k(V)$ がモジュラーとなる $h-k$ 近傍 V をもつ．

そのときつぎが成り立つ．

定理 3·44　可換環 A が完全正則となるための必十条件は M_A の $h-k$ 位相が Gelfand 位相と同等なることである．

証明　被集合は Gelfand 位相で閉であるから，$h-k$ 位相は Gelfand 位相に等しいか弱い．それゆえ A が完全正則なることと Gelfand 位相に関する M_A の閉集合が被集合となることは同等であることを示せばよい．これはまた M_A の任意の Gelfand 位相に関する閉集合 F と $F\not\ni\varphi$ に対して $a\in A$ が存在して $\hat{a}(\varphi)\neq 0$, $\hat{a}(F)=0$ なる条件と同等である．

さて A を完全正則とする．そして閉集合 F で $F\not\ni\varphi_0$ とする．そのとき完全正則の条件から φ_0 の $h-k$ 近傍 V が存在して $k(V)$ はモジュラーとなる．$F_0=F\cap h(k(V))$ とおけば Gelfand 位相で $h(k(V))$ はコンパクトとなり（定理 3·36），その結果 F_0 もコンパクトである．$h-k$ 位相は Hausdorff で $F_0\not\ni\varphi_0$ なるゆえ F_0 の任意の点 φ に対して φ の近傍 U が存在して $\varphi_0\notin h(k(U))$ となる．F_0 はコンパクトであるゆえこれらの U の有限個 $U_1, U_2, \cdots, U_n$ で被覆される．$\varphi_0\notin h(k(U_i))$ なるゆえ，任意の $i\,(i=1,2,\cdots,n)$ に対して $a_i\in A$ が存在して $\hat{a}_i(\varphi_0)\neq 0$, $\hat{a}_i(U_i)=0$ となる．また $\varphi_0\notin M_A-V$ でかつ M_A-V は被集合であるから $a_0\in A$ が存在して $\hat{a}_0(\varphi_0)\neq 0$, $\hat{a}_0(M_A-V)=0$ となる．そしてここで $a=a_0a_1\cdots a_n$ とおけば $\hat{a}(\varphi_0)\neq 0$ でかつ $(U_1\cup U_2\cup\cdots\cup U_n)\cup(M_A-V)$ の任意の元 φ に対して $\hat{a}(\varphi)=0$ となる．$V\subset h(k(V))$ なるゆえ上の集合は F をふくみ，それゆえ $\hat{a}(F)=0$ である．これは F が被集合なることを示している．

さてつぎに二つの位相，Gelfand 位相と $h-k$ 位相が同等であると仮定しよう．Gelfand 位相はつねに Hausdorff なるゆえ $h-k$ 位相も Hausdorff となる．また φ_0 を M_A の任意の点とし $a\in A$ を $\hat{a}(\varphi_0)\neq 0$ とおく．$V=\{\varphi\in M_A : |\hat{a}(\varphi)|>1/2|\hat{a}(\varphi_0)|\}$ とすれば V は Gelfand 位相で開集合で $\bar{V}\subset$

$\{\varphi\in M_A : |\hat{a}(\varphi)|\geqq 1/2|\hat{a}(\varphi_0)|\}$ はコンパクト．二つの位相が同等なることから $\bar{V}$ は被集合となり，定理 3·36 から $k(\bar{V})$ はモジュラーとなる．$k(V)=k(\bar{V})$ から A が完全正則なることが証明された． *qed*

この定理はつぎのようにいってもよい．

系 3·45 可換環Aが完全正則であるための必十条件は M_A の任意の閉集合 F と $F\not\ni\varphi_0$ に対して $a\in A$ が存在して $\hat{a}(\varphi_0)\neq 0$, $\hat{a}(F)=0$.

この条件が抽象空間論における完全正則空間の条件と似ているので，そのような名前がつけられた．

完全正則環の定義と上の定理，定理 3·39 より容易につぎの系がえられる．

系 3·46 可換環Aが完全正則ならばそれは局所単位元をもつ．

定理 3·47 A を半単純完全正則可換 Banach 環として τ を A から可換 Banach 環 B への同型写像とする．そのときその共役写像（3·1 節A項）は M_B^∞ を M_A^∞ の上へ写す．

証明 τ の共役写像を τ' とし，$\tau'(M_B^\infty)=\Phi$ としたとき，$\Phi=M_A^\infty$ がいえればよい．いまそうでないとして $\varphi_0\in M_A^\infty-\Phi$ とする．そのとき任意の $\psi\in M_B^\infty$に対して $\tau'(\psi)\neq\varphi_0$ となるゆえ，$a_\psi\in A$ が存在して $\widehat{\tau a_\psi}(\psi)\neq\hat{a}_\psi(\varphi_0)$ となる．$\varepsilon_\psi=1/2\cdot|\widehat{\tau a_\psi}(\psi)-\hat{a}_\psi(\varphi_0)|$ とおき

$$H_\psi=\{\psi'\in M_B^\infty,\ |\widehat{\tau a_\psi}(\psi')-\hat{a}_\psi(\varphi_0)|<\varepsilon_\psi\}$$

とおけば H_ψ は M_B^∞ の開集合でψをふくむ．M_B^∞ はコンパクトなるゆえ，有限個の $H_{\psi_1}, H_{\psi_2}, \cdots, H_{\psi_n}$ は M_B^∞ を被覆する．$\varepsilon=\min(\varepsilon_{\psi_1}, \varepsilon_{\psi_2}, \cdots, \varepsilon_{\psi_n})$ とおけば M_A^∞ の近傍 $V=U_{\varphi_0}(a_{\psi_1}, a_{\psi_2}, \cdots, a_{\psi_n};\ \varepsilon)$ はΦと共通点をもたないことが容易に証明される．ここでAが完全正則なるゆえ，Vの中にふくまれるφ_0の近傍Uで，その閉包がコンパクトとなるものが存在する．また系 3·38 と系 3·45 よりAに二つの元 a, b が存在して

$$\hat{a}(\varphi_0)=1,\ \hat{a}(M_A-U)=0,$$
$$\hat{b}(U)=1,\ \hat{b}(M_A-V)=0.$$

ゆえに任意の $\varphi\in M_A$ に対して $\widehat{ab}(\varphi)=\hat{a}(\varphi)$ となり，Aが半単純なることから $ab-a=0$ となる．ところで任意の $\psi\in M_B^\infty$ に対して $\widehat{\tau b}(\psi)=0$ となる．これは $\widehat{\tau b}(\psi)=\hat{b}(\tau'\psi)$ と $\Phi\cap V=\phi$ から導かれる．このことから τb はBの中で擬正則となる（定理 3·4）．それゆえ $c\in B$ が存在して $\tau b\circ c=0$, そして

$\tau a=\tau a\circ\tau b\circ c=(\tau a+\tau b-\tau a\cdot\tau b)\circ c=\tau(a+b-ab)\circ c=\tau b\circ c=0$. しかし仮定より τ は同型写像で，かつ $a\neq 0$. この矛盾は $\tau'(M_B^\infty)=M_A^\infty$ を示している.

qed

系 3·48 A を半単純完全正則可換 Banach 環とし，それが代数的に1つの可換 Banach 環 B にふくまれているとする．そのとき任意の $x\in A$ に対して $\sigma_A(x)\cup(0)=\sigma_B(x)\cup(0)$ となる.

証明 τ を A から B の中への恒等写像とし，この τ に対して上の定理を用いる．このとき τ' は M_B^∞ の元 ψ を，ψ の A の上への縮小から得られた M_A^∞ の元へ写す．上の定理と定理 3·4 よりこの系は証明される. *qed*

T を局所コンパクト Hausdorff 空間とし，$A=C_0(T)$ とおく．いま $|f|$ を A のノルム（このノルムで A が完備とは限らない）とし，$|fg|\leqq|f|\cdot|g|$ (f, $g\in A$) を満たすとする．このノルムに関する A の完備化を B としたとき，上の系を用いれば，任意の $f\in A$ に対して $\sigma_A(f)\cup(0)=\sigma_B(f)\cup(0)$ となる．定理 3·5 より $r_A(f)=r_B(f)$ となるが，$A=C_0(T)$ なるゆえ，A の普通の意味のノルムを $\|f\|=\sup\{|f(t)|;\ t\in T\}$ とすれば，$\|f\|=r_A(f)=r_B(f)\leqq|f|$. すなわち $C_0(T)$ の中の $|fg|\leqq|f|\cdot|g|$ を満たす最小のノルムは $\|f\|$ となる[*]．これは Kaplansky [文献 31)] により証明された.

系 3·49 $C_0(T)$ をノルム環 (Banach 環とは限らない) とする任意のノルムを $|f|$ とすれば，$\|f\|\leqq|f|(f\in C_0(T))$ となる.

注意 この系と全く同じ証明で，A が半単純可換完全正則 Banach 環の場合にも拡張できる：A をノルム環とする任意のノルムを $|x|$ とすれば $r(x)\leqq|x|\,(x\in A)$.

*) $|f|$ が A を Banach 環とする場合は系 3·13.

第4章　関　数　環(1)

この章とつぎの第5章では関数環の理論を紹介する．第5章では Hardy クラス H^p の理論などについて述べるが，この章では主に関数環の基本的な概念について詳しく述べたい．4·1 節においては関数環の例をあげ，また関数環の基礎的な概念である Šilov 境界，Choquet 境界，本質集合，交代集合，極大環などの意味とその関係を明らかにする．4·2 節では Stone-Weierstrass の定理の拡張である Bishop の定理を証明する．任意の関数環を交代集合によって表わそうとするこの定理は Šilov によって暗示されたものであるが，また関数環の本質をよく表わしている．4·3 節では関数環の Gleason 部分について述べる．この Gleason 部分なる概念を通して，抽象的に与えられた関数環が古典的な関数論と結びつくのである．とくに Dirichlet 環の場合の Wermer の定理がそれを表わしている．この節ではその Wermer の定理も証明される．4·4 節においては補間集合 (interpolation set) についてくわしく述べる．複素平面上の単位円の上の，Lebesgue 測度0の閉集合 F の上で定義された任意の複素連続関数が，単位閉円板の上で連続でその内部（単位開円析）で解析的な関数に拡張されるという Rudin の定理は，古典的な Fatou の定理の拡張であるが，この事実が一般化された形として，きれいな理論を作る．4·5 節では関数環のイデアルの乗関数 (multiplier) について述べる．最後の 4·6 節においては関数環の理論の中で，かなり重要な位置をしめている Rossi の局所最大値原理と，その1つの応用として Rickart の極大イデアル空間に関する定理について論ずる．

4·1　関数環の基本概念

A．関数環の定義　例

X を任意のコンパクト Hausdorff 空間とする．X の上で定義された複素値連続関数全体の集合を $C(X)$ とし，実数値連続関数全体の集合を $C_R(X)$ で表わす．$C(X)$，$C_R(X)$ の二つの関数の和，積およびスカラーと関数の積を普通の意味の関数の和，積，スカラーとの積のように定義し，そのノルムを $\|f\|=\sup\{|f(x)|: x\in X\}$ と定義すれば，$C(X), C_R(X)$ はそれぞれ Banach 環となる．

$C(X)$ の部分多元環，すなわち $f, g\in A$ なら $f+g\in A$，$fg\in A$，また任意

の複素数 λ で $\lambda f \in A$ となる $C(X)$ の部分集合 A で，つぎの条件を満たすとき A を **X の上の関数環** (function algebra on X) という．

(i) A はノルム $\|f\|$ に関して閉である．

(ii) A は定数関数 1 をふくむ．

(iii) A は X の任意の二点を分離する．すなわち X の異なる任意の二点 x, y に対してある $f \in A$ が存在して $f(x) \neq f(y)$.

このように定義だけから見れば関数環は非常に抽象的なものであるが，あとに述べる条件がつくことにより，かなり具体的なものとなり関数論と密接に関係がつく．研究の対象になるような関数環の例をいくつかあげる．

例 1. X を複素平面の上の単位円とする．X の上の複素値連続関数 f であって，単位閉円板で連続でその内点（単位開円板）で解析的 (analytic) な関数に拡張できるもの全体は X の上の関数環となる．いいかえれば X の上の複素値連続関数 $f(e^{i\theta})$ で

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} f(e^{i\theta}) d\theta = 0 \qquad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

となる f 全体である．この環を**ディスク環** (disk algebra) という．

例 2. X を単位閉円板とする．X の上で連続でその内点（単位開円板）で解析的となる関数全体は X の上の関数環となる．これは例 1 の関数環と同じようであるが，関数環の一般論からすれば少々異なる．

例 3. F を Riemann 面とし X は F の上の 1 つの解析的曲線で F の一つのコンパクト部分集合 K の境界になっているとする．X の上で定義された連続関数で，$K-X$ へ解析的に拡張できるもの全体は関数環をなす．

例 4. X を複素平面上の一つの単連結 (simply connected) 領域の境界とする．A を X の上での多項式全体の一様収束による閉包とすれば，それは関数環となる．

例 5. X をコンパクト Abel 群でその指標群 (character group) $\hat{X}$ が実数の加法群の部分群になるようなものとする．A を，その Fourier 変換が $\hat{X}$ の負の部分で 0 となるような X の上の連続関数全体とする．そのとき A は関数環．

この他に後に述べる Helson-Lowdenslager の例とか，n 次元複素空間 C^n のコンパクト部分集合 X 上の関数環を考えることにより多変数関数論ともつな

がりをもつ.

B. Šilov 境界, Choquet 境界

X を位相空間とし, H を X の上で定義された連続関数の一つの族とする. X の閉集合 F において H のすべての元 h でその絶対値 $|h|$ が最大値をとるとする. すなわち任意の $h\in H$ に対して, ある $x\in F$ が存在して $|h(x)|=\|h\|=\sup\{|h(y)|: y\in X\}$. そのような閉集合 F の中で最小の閉集合 F_0 がもし存在するとすれば, その F_0 をHの **Šilov 境界** といい $\partial_H X$, または単に ∂_H で表わす. Xがコンパクト Hausdorff 空間, HがXの上の関数環AとしたときA の Šilov 境界は存在するわけであるが, X, H がもっと弱い条件でも Šilov 境界が存在する場合がある (Arens and Singer [文献 32)]). ここでその1例として Bear [文献 33)] のものをあげる. もちろんこれは "関数環での Šilov 境界の存在"をふくんでいるわけである.

定理 4・1 X をコンパクト Hausdorff 空間とする. H を $C(X)$ の線型部分空間で, 定数関数1をふくみ X の二点を分離すると仮定する. そのとき H の Šilov 境界 $\partial_H X$ が存在する. すなわち (i) 任意の $f\in H$ に対して $x\in\partial_H X$ が存在して $|f(x)|=\|f\|$. (ii) $\partial_H X$ は (i) を満たすような閉集合のうちで最小のものである.

証明 Zorn の補題より (i) を満たすような閉集合の族で, その族にふくまれる任意の有限個の集合の共通部分も (i) を満たすようなもののうちで極大な族が存在するからそれを $\mathfrak{F}$ とおく. そして $F=\cap\{F_\lambda: F_\lambda\in\mathfrak{F}\}$ とすれば F は閉集合である. 以下 $F=\partial_H X$ なることを示そう. $\mathfrak{F}$ のおのおのの元 F_λ はもちろん $M(f)=\{x: |f(x)|=\|f\|\}$ ($f\in H$) と交わり, Xはコンパクトなるゆえ $M(f)\cap F\neq\phi$ となりFも (i) を満たす.

さて B を (i) をもつような一つの閉集合とする. いま $B\supset F$ なることを示すために $x_0\in F-B$ とする. V は x_0 の近傍で $V\cap B=\phi$ となるものをつぎの形にとれる.

$$V=\{x: |f_i(x)-f_i(x_0)|<\varepsilon,\ i=1,\cdots,n\}$$

ここで $f_i\in H\,(i,1\cdots,n)$ である. これは H が X の二点を分離するから H から導かれたXの弱位相が, Xのもとの位相 (コンパクト空間) と同等であるからである. ここで $g_i=f_i-f_i(x_0)$ とおけば $g_i\in H$ で $V=\{x: |g_i(x)|<\varepsilon, i=$

$1, \cdots, n\}$ となる．$F = \cap\{F_\lambda : F_\lambda \in \mathfrak{F}\}$ でかつ $\mathfrak{F}$ は極大なるゆえ $F-V$ は（i）を満たさない．そしてそれゆえ $f \in H$ が存在して

$$\|f\| > \sup\{|f(x)| : x \in F-V\} = \|f\|_{F-V}.$$

ここで $k = mf$（m は正整数）とおき m を十分大きくとれば

$$\|k\| - \|k\|_{F-V} > \|g_1\| + \cdots + \|g_n\|.$$

$x \in V$ では $|\alpha| = 1$ となる任意の複素数 α に対して

$$|k(x) + \alpha g_i(x)| < \|k\| + \varepsilon \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

もし $x \in F-V$ ならば

$$|k(x) + \alpha g_i(x)| \leqq \|k\|_{F-V} + \|g_i\| < \|k\| \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

それゆえすべての i，すべての $\alpha(|\alpha| = 1)$，そしてすべての $x \in F$ で

$$|k(x) + \alpha g_i(x)| < \|k\| + \varepsilon$$

となる．t を X の点で $\|k\| = |k(t)|$ とし，α_i を $|k(t) + \alpha_i g_i(t)| = \|k\| + |g_i(t)|$ となるようにとれば上の式より

$$|g_i(t)| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

これから $t \in V$ となり，結局 $|k|$ は V の中だけで最大値をとることになり，いいかえれば B の上では最大値をとらない．これは B が（i）を満たすことに反する．すなわち F は（ii）を満たすことになる． qed

さてたとえば始めにあげた例1では Šilov 境界は X，例2ではそれは単位円となる．これは関数論の最大値原理からすぐわかる．

ところで Šilov 境界は閉集合であるが，閉集合でなくて任意の H の元 f に対して $|f|$ がそこで最大値をとるような集合を考えて見る．

定義 位相空間 X の上で定義された連続関数の族 H に対して X の部分集合 Y がつぎの条件を満たすとき Y を H に関する**境界**（boundary）という：任意の H の元 f に対して $y \in Y$ が存在して $\|f\| = |f(y)|$.

点集合論的な境界と混同する危険がある場合には点集合論的な境界を位相的境界（topological boundary）ということがある．さて上に定義した Šilov 境界も一つの境界であるが，つぎに述べる Choquet 境界も一つの“境界”になる．

定義 X をコンパクト Hausdorff 空間とし，M を $C(X)$ の一つの線型部分空間とする．ここで M は定数関数1をふくむものとする．$K(M)$ を M の上の線型汎関数 L で $L(1) = 1 = \|L\|$ となるものの全体とする．$X \ni x$ に対し

て $(\phi x)(f)=f(x)$ $(f\in M)$ で ϕx を定義すればもちろん $\phi x\in K(M)$ となる．M に関する **Choquet 境界** B_M とは ϕx が $K(M)$ の端点となる $x(\in X)$ の集合のことである．ここでLが $K(M)$ の端点であるとは $L=1/2(L_1+L_2)$, L_1, $L_2\in K(M)$ なら $L_1=L_2=L$ となることをいう．

定理 4·2 M に関する Choquet 境界 B_M は M に関する1つの境界である．

証明 fをMの任意の元とし，L_0 を $|L_0(f)|=||f||$ となる $K(M)$ の元とする．そのような L_0 は存在する．なんとならば $||f||=|f(x_0)|$ なるとき $L_0(g)=g(x_0)$ $(g\in M)$ とおけばよい．さて $\mathfrak{K}_0$ で $L(f)=L_0(f)$ となる $K(M)$ の元 L すべての集合とする．そのとき $\mathfrak{K}_0$ は空でない*-弱コンパクト凸集合 ($\mathfrak{K}_0$ は M の共役空間 M' の単位球の中にあるから)．それゆえ $\mathfrak{K}_0$ の端点 L_1 が存在し（1·1 節A項 f），必然的にそれは $K(M)$ の端点となる．ここで $K(M)$ は $\{\phi(y):y\in Y\}$ の*-弱閉凸被であるから*⁾，B_M のある点 x で $L_1=\phi x$ となる．$|f(x)|=|L_1(f)|=|L_0(f)|=||f||$．$f$ は M の任意の関数なるゆえ B_M は1つの境界である（巻末補遺を見よ）． *qed*

定理 4·3 M を $C(X)$ の線型部分空間で1をふくみ，かつXの二点を分離するものとする．そのとき M に対する Choquet 境界 B_M の閉包は M に対する Šilov 境界 ∂_M に等しい．

証明 上の定理により B_M の閉包 $\bar{B}_M$ も M に関する一つの境界であるから $\bar{B}_M\supset\partial_M$ は明らか．それゆえ $B_M\subset\partial_M$ が証明されればよい．もしそうでないとすれば $B_M-\partial_M$ の一点 x をとり x の近傍Uを $U\cap\partial_M=\phi$ のようにとる．そのとき $f\in M$ が存在して $\sup\{|f(y)|:y\in X-U\}<\sup\{|f(y)|:y\in U\}$ を示すことができる．もしそれが証明できたとすれば $\partial_M\subset X-U$ なることから矛盾がおきる．以下その証明：ϕx は $K(M)$ の端点であり，また $\phi(U)$ は $\phi(X)$ において ϕx の *-弱近傍なることは明らかである (M は X の二点を分離するから)．*-弱位相の定義と $M\ni 1$ なることにより $f_1,f_2,\cdots,f_n\in M$ と $\varepsilon>0$ が存在して

$$\phi x\in\cap\{L:\mathrm{Re}L(f_i)<\varepsilon\}\cap\phi(X)\subset\phi(U).$$

ここで $\mathrm{Re}L(f)$ は $L(f)$ の実数部分を表わす．$K_i=\{L:\mathrm{Re}L(f_i)\geqq\varepsilon\}\cap K(M)$

---

*⁾ そうでないならある $f\in M$ で $\sup\{(\mathrm{Re}f)(y);\ y\in Y\}<\sup\{\mathrm{Re}L(f):L\in K(M)\}\leqq\sup\{\mathrm{Re}L(f):L\in C(X)',||L||=1\}=||\mathrm{Re}f||$．$f$ に十分大きな正の定数を加えて $\mathrm{Re}f\geqq 0$ とすれば，上の式の左辺も $||\mathrm{Re}f||$ となり不合理．

$(i=1, 2, \cdots, n)$ は *-弱コンパクト凸集合であるが，$K_i(i=1, 2, \cdots, n)$ の集合和の凸包 (convex hull) J ももちろん *-弱コンパクトとなる．しかしここで端点 ϕx が J にふくまれない．もしふくまれたとすれば ϕx は J の端点となり，ある i で K_i にふくまれることになるからである．ゆえに $\phi y \notin J$. 1·1 節A項 g よりある $f \in M$ が存在して $\sup \mathrm{Re} f(J) < \mathrm{Re}(\phi x)(f)$. $\phi(X)-\phi(U) \subset \bigcup_{j=1}^{n} K_j \subset J$ なるゆえ $\sup(\mathrm{Re} f)(X-U) < \mathrm{Re} f(x)$. この式の両辺の f に十分大きな正の数を加えることにより所要の式が得られる．　qed/

さてとくに M が関数環 A の場合 A に関する Choquet 境界はどのようなものになるか．それについてはつぎの Bishop-de Leeuw [文献 34)] の定理がある．証明はかなり長く頁数の関係でのせられないが，上の論文または Phelps [文献 35)] を見ていただきたい．　qed/

定理 4·4　A を X の上の関数環とし，$x_0 \in X$ とする．そのときつぎの三つの条件は同等である．

(1)　x_0 は A に関する Choquet 境界 B_A の元である．

(2)　x_0 の任意の近傍 U と任意の $\varepsilon>0$ に対して $f \in A$ が存在して

$$\|f\| \leqq 1, \ |f(x_0)| > 1-\varepsilon \ \text{かつ} \ |f(x)| \leqq \varepsilon \ (x \in X-U).$$

(3)　S を x_0 をふくむ G_δ 集合とすれば $f \in A$ が存在して，

$$|f(x_0)| = \|f\| \ \text{かつ} \ \{x : |f(x)| = \|f\|\} \subset S \ \text{である}.$$

系 4·5　X が距離空間で A を X の上の関数環とする．そのとき A に関する Choquet 境界は A に関する尖点全体の集合と一致する．ここで X の点 p が尖点 (peak point) であるとは，ある $f \in A$ で $f(p)=1$, $|f(x)|<1 (x \in X-\{p\})$ となることである．

証明　上の定理の (1)↔(3) から明らか．　qed/

さて A に関する尖点は当然 A に関する任意の境界に属することは明らかなるゆえ，X が距離空間なるときは尖点全体の集合 (=Choquet 境界) は最小の境界となるわけである．

ここで Choquet 境界は Šilov 境界の部分集合となるわけだが，それら二つは一般に異なる．その例をあげよう．

例　A をディスク環とする．すなわち前にあげた例 1 の環である．そして $B=\{f \in A;\ f(0)=f(1)\}$ とすれば B はまた一つの関数環となる (ここで $f(0)$

は f を単位円板まで拡張したときの原点での値を表わす). X は距離空間なるゆえ B に関する Choquet 境界は B に関する尖点全体で，これは単位円から $\{1\}$ を引いたものであり，B の Šilov 境界（＝単位円）と異なる．

注意 Choquet 境界の起りとなった Choquet の定理などのくわしいことは Phelps [文献 35)] を参照されたい．定理 4.4 (3) の G_δ 集合は開集合にかえられる．

C. 関数環の種類，本質集合

Xをコンパクト Hausdorff 空間，AをXの上の関数環とする．Aが**解析環** (analytic algebra) であるとはXの空でない開集合の上で 0 となるAの関数はXで恒等的に 0 になることであり，Aが**交代環** (antisymmetric algebra) とは実関数である A の任意の関数は定数関数となるときにいう．いいかえれば $f\in A$ が $\bar{f}$ ($\bar{f}(x)=\overline{f(x)}$: $f(x)$ の共役複素数) と等しくなるときは f が定数関数のときに限ることである．またAが**本質環** (essential algebra) であるというのは，つぎのようなときにいう：Xの閉集合Fで $f(F)=0$ となる任意のXの上の連続関数fは必ずAにふくまれるというものを考える．そのような閉集合 F の中で最小のものが存在する（その存在はあとで証明する）．それを A の**本質集合** (essential set) という．Aの本質集合EがXに等しいときAは本質環といわれる．いいかえればXと異なるXの任意の閉部分集合 F に対して $f(F)=0$ で，かつAに属さないようなXの上の連続関数fが存在することである．また環Aが**条件** (***P***) を満たすとはXと異なる任意のXの閉部分集合Fに対して，AのFへの縮小 (restriction) $A|F$ が $C(F)$ で稠密であるときにいう．この環は pervasive algebra とよばれているが，ここでは条件 (P) を満たすということにする．さてこれらの関数環の間の関係を述べる前に本質集合の存在をいうことにする．

定理 4・6 関数環Aに対して，つぎを満たすようなXの閉集合の中で最小なEが存在する：$f(E)=0$ となるようなXの上の任意の連続関数fはAに属す．すなわちAの本質集合の存在がいえる．

証明 $\mathfrak{I}=\{I_\lambda\}$ をAにふくまれる $C(X)$ の閉イデアルの全体とする．$\mathfrak{I}$ は空集合でない，なんとなれば零イデアルが $\mathfrak{I}$ に属するからである．それゆえ $\{I_\lambda\}$ から生成されたイデアルの閉包 I は A にふくまれる $C(X)$ の閉イデアルとなる．I は A にふくまれる $C(X)$ の閉イデアルのうち最大のものであ

る．そこで $Z(f)=\{x\in X : f(x)=0\}$，$E=\cap\{Z(f) : f\in I\}$ とおけば $I=\{f\in C(X) : f(E)=0\}$ となる．なんとなれば $\{f\in C(X) : f(E)=0\}\supset I$ は明らか．つぎに f を $f(E)=0$ となる任意の 0 でない連続関数とし任意の $\varepsilon>0$ で $U=\{x\in X,\ |f(x)|<\varepsilon\}$ とおく．$E=\cap\{Z(g) : g\in I\}\subset U$ から，ある $g_i\in I$ $(i=1,2,\cdots,n)$ で，$\bigcap_{i=1}^{n} Z(g_i)\subset U$ なるゆえ $Z(\sum_{i=1}^{n}\bar{g}_i g_i)\subset U$．$I$ は $C(X)$ の中のイデアルなるゆえ $h=\sum_{i=1}^{n}\bar{g}_i g_i\in I$．$\inf\{h(x);\ x\in X-U\}=c>0$ としたとき $f(h+c\varepsilon/||f||)^{-1}\in C(X)$，そして $k=hf\cdot(h+c\varepsilon/||f||)^{-1}\in I$．簡単な計算から $||f-k||\leqq\varepsilon$ となるから $f\in I$．またこのことから E の最小性も容易に証明できる．　　*qed*

種々の関数環の間につぎの関係がある．

定理 4·7　A を X の上の関数環としたとき，つぎのことが成り立つ．

（i）　A は $C(X)$ と異なる関数環で条件（P）を満たせば A は解析環である．

（ii）　A が解析環ならば整域（integral domain）である．すなわち，$f,g\in A$ で $fg=0$ なら $f=0$ または $g=0$．

（iii）　A が整域なら交代環である．

（iv）　A が交代環なら本質環である．

証明　（i）　$f\in A$ が X の空でない開集合 U の上で 0 だとする．$\bar{V}\subset U$ となる空でない開集合 V をとれば，A は（P）を満たすから $g\in C(X)$ に対して A の元 f_n が存在して $X-V$ の上で f_n は g に一様に収束する．ゆえに ff_n は X の上で fg に一様に収束する．かくして $f\cdot C(X)=\{fg : g\in C(X)\}\subset A$ となる．$f\cdot C(X)$ は $C(X)$ の中の一つのイデアルなるゆえ定理 4·6 の証明の中にあると同様な方法で $K=\{x : f(x)=0\}$ の上で 0 となる任意の X の上の連続関数は A にふくまれることになる．ゆえに $A|K$ は $C(K)$ の閉部分環となることは明らか．これから f は恒等的に 0 となる．なんとなればもしそうでないなら $K\subsetneqq X$ なるゆえ条件（P）より $A|K$ は $C(K)$ の中で稠密．それゆえ $A|K=C(K)$ となる．これは $A=C(X)$ なることを示す．なんとなれば $g\in C(X)$ なら $g|K\in C(K)=A|K$ から適当な $h\in A$ で，K の上では $g=h$ となる．$g-h$ は K の上で 0 であるから上のことから $g-h\in A$，すなわち $g\in A$ である．$A\neq C(X)$ なる仮定から（i）は証明された．（ii）はほとんど明ら

かなるゆえ (iii) を証明する．R を A の自己随伴部分とする．すなわち $R=\{f : f\in A,\ \bar{f}\in A\}$ とする．そのとき R は A の閉部分環である．R は自己随伴なるゆえ Stone-Weierstrass の定理 (定理 3·19) より，あるコンパクト Hausdorff 空間 Y で R は $C(Y)$ と等長同型となる．A は整域なるゆえ $C(Y)$ も整域となる．ゆえに Y は一点のみからなる空間となり，結局 R は定数関数のみをふくむことになる．(iv) もし A の本質集合 E が X と異なれば，$f(E)=0$ で恒等的に 0 でない X の上の実連続関数 f が存在することになり A は交代環でなくなる． *qed*

定義 X の上の関数環 A が**極大環** (maximal algebra) であるといわれるのは，A は $C(X)$ と異なりかつ $C(X)\supset B\supset A$ となる関数環 B は $C(X)$ に等しいか A に等しい場合にいう．

ところで本質極大環 (essential maximal algebra) は解析環であることが Helson and Quigley [文献 36)] によって始めて証明されたが，もっとくわしくつぎのことが証明できる．

定理 4·8 本質極大環は条件 (P) を満たす．

証明 A を X の上の本質極大環とする．K を X の任意の閉部分集合とし $K\neq X$ とする．そして $A_1=\{f\in C(X) : f|K\in A_K\}$ とおく．ここで $f|K$ は f を K の上に縮小したもの，A_K は A の関数を K の上に縮小したものの K の上での一様収束の位相における閉包を表わすものとする．そのとき A_1 は X の上の関数環で $A\subset A_1\subset C(X)$ は明らか．ここで A は極大環なるゆえ $A_1=A$ かまたは $A_1=C(X)$ となる．もし $A_1=A$ となったとすれば，X の上の連続関数 f が K の上で 0 となれば $f\in A_1=A$ となり，K は A の本質集合 E をふくむ．ところが $X\supsetneqq K$ なるゆえこれは A が本質環であることに反する．ゆえに $A_1=C(X)$ となる．これは $A_K=C(K)$ なることを示し，A は条件 (P) を満たす． *qed*

定理 4·7 よりつぎの系 4·9 (Helson and Quigley の定理) が導かれる．

系 4·9 本質極大環は解析環である．

系 4·10 A を X の上の本質極大環とし，さらに A はつぎの性質をもつものとする：0 にならない $f\in A$ に対して $1/f$ も A にふくまれる．そのとき $f, g\in A$ で $|f|\equiv|g|>0$ が成り立てば，ある複素数 α で $f=\alpha g$ となる．

証明 $h=f/g$ とすれば $\bar{h}=g/f$ となるから $h, \bar{h}\in A$ となる．その結果 $h+\bar{h}$, $1/i(h-\bar{h})$ はともに A の元で実関数であるから定理 4·7, 4·8 より上の二つの関数は定数関数となる．その結果 h は定数関数 α となり $f=\alpha g$ となる．qed/

D. 極 大 環

極大環の定義は C. ですでに述べたが，ここではディスク環 A（例 1）が極大環であることを示す．これは Wermer［文献 37)］の極大定理（Maximality theorem）とよばれている．

定理 4·11 ディスク環 A は極大環である．

証明 Γ を複素平面上の単位円とする．B を A をふくむ $C(\Gamma)$ の閉部分環とする．ここで $B=A$ かまたは $B=C(\Gamma)$ なることが証明されればよい．いま A から複素数体 C への準同型写像 Φ をつぎのように定義する．

$$\Phi(f)=f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{i\theta})d\theta \qquad (f\in A)$$

まずこの Φ が B から複素数体 C への準同型写像に拡張できないと仮定する．すなわち B から C への準同型写像を A に縮小したとき Φ になるものが存在しないとする．Φ は関数 z を 0 に写す唯一つの準同型写像なるゆえ，関数 z を 0 に写すような B から C への準同型写像が存在しないことになる．これは関数 z が任意の B の極大イデアルに入らないことを意味する．それゆえまた関数 z は B の純イデアルにふくまれない．これは $zB=B$ なることを示す．これから $1/z=\bar{z}\in B$ となる．関数 z と $\bar{z}$ が B にふくまれることから Fejer の定理*) より $B=C(\Gamma)$ となる．つぎに Φ が B の準同型写像 $\tilde{\Phi}$ に拡張できたときのことを考えよう．$\tilde{\Phi}$ は B の上のノルム 1 の線型汎関数と考えられるから，単位円 Γ の上に定義された有限複素測定 μ が存在して B のすべての元 f に対して

$$\tilde{\Phi}(f)=\int fd\mu$$

となる．ここで μ の全測度は 1 である．

$\tilde{\Phi}(1)=1$ なるゆえ $\int d\mu=1$. よく知られているように $\int d\mu=1$ で μ の全測度 1 なら μ は正測度（positive measure）となる．B は A をふくむゆえ，任意

*) 周期 2π をもつ任意の連続関数は $\sum_{k=-n}^{n}a_ke^{ikx}$ の形の多項式で一様に近似されるという定理．たとえば Hoffman［参考文献⑧］, p. 20.

の正整数 n で

$$\int e^{in\theta}d\mu(\theta)=\widetilde{\Phi}(z^n)=\Phi(z^n)=z^n(0)=0$$

μ は実測度なるゆえ $d\mu=1/2\pi d\theta$ となる．なんとなれば ReA は Γ の上の実連続関数全体の集合 $C_R(\Gamma)$ の中で稠密なることがわかるゆえ*)，A の任意の元 f で

$$\int f d\mu=f(0)=\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{i\theta})\left(\frac{1}{2\pi}d\theta\right)$$

なることより $d\mu=1/2\pi d\theta$ となるわけである．さて f を B の任意の元としたとき

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\theta}f(e^{i\theta})d\theta=\int z^n f d\mu=\widetilde{\Phi}(z^n f)=\widetilde{\Phi}(z^n)\widetilde{\Phi}(f)$$
$$=z^n(0)\widetilde{\Phi}(f)=0 \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

これは $f\in A$ となることを示している．すなわち $B=A$ である． qed/

Wermer の最初の証明はもっと古典的な方法を用いて証明されたが，上の証明は Hoffman and Singer [文献 42)] によるものである．

系 4・12 K を単位円 Γ の閉集合で $K\neq\Gamma$ とする．そのとき K の上の任意の複素値連続関数は多項式で一様に近似される．

証明 B を，$f|K$ が K の上で多項式で一様に近似されるような Γ の上の連続関数 f の全体とする．ディスク環 A の任意の関数は Γ の上で多項式で一様に近似されるから（定理 4・13 参照）$C(\Gamma)\supset B\supset A$ で，かつ B は関数環である．それゆえ上の定理より $B=A$ または $B=C(\Gamma)$ となる．ところが K の上で 0 となるすべての連続関数は B にふくまれ，かつ $K\neq\Gamma$ なるゆえ $B=A$ となり得ない．それゆえ $B=C(\Gamma)$ となり系は証明された． qed/

この Wermer の極大定理を拡張したものの一つとしてつぎの Bishop の定理がある．

K を複素平面上の単連結コンパクト集合とし，内点をもっているとする．X を K の位相的境界としたとき X の上での多項式全体の閉包は $C(X)$ の極大閉部分環となっている．

また極大定理は一様収束に関係があるが，つぎの Mergelyan [文献 38)]

*) これは後にでてくる Dirichlet 環の性質である．

の一様収束定理は有名であり，利用価値も大きい．

定理 4·13　X を複素平面 C 上の C を分離しないコンパクト集合とする．そのとき X の上で連続で，X の内点で解析的である任意の関数は，X の上で多項式 $\left(P(z)=\sum_{i=1}^{n} a_i z^i\right.$ の形のもの) によって一様に近似される．

この定理はこの後，しばしば用いるが，ここでは証明はしない．Rudin [文献 39), p. 386] にも証明が出ているから参照されたい．

E．測度と Šilov 境界

いま D を複素平面上の単位閉円板とし単位円を Γ とする．f を D の上で連続で，D の内点 ($D-\Gamma$) で解析的であるような任意の関数としたとき $D-\Gamma$ の点，すなわち $|s|<1$ となる s における f の値 $f(s)$ は Poisson 核 $P_r(\theta)$ でつぎのように書けることはよく知られている．

$$f(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})P_r(\theta-t)dt \qquad (s=re^{i\theta}).$$

ここで $P_r(\theta)=(1-r^2)/(1-2r\cos\theta+r^2)$ である．

さて $m_s(dt)=(1/2\pi)P_r(\theta-t)dt$ とおけば，これは Γ の上の一つの正測度であり，上のことはつぎのようにいえる．A をディスク環とするとき，A の任意の元 f の $D-\Gamma$ の点 s における値は Γ の正測度 m_s によってつぎのように表わされる．すなわち

$$f(s)=\int_{\Gamma} f(t)dm_s(t) \qquad (f\in A)$$

このようなことが一般の関数環でもいえるかどうかについて考える．A を任意の関数環としたとき，A の極大イデアル空間 M_A が考えられる (3·1 節A項)．これは A のトリビアルでない複素値準同型写像の全体の集合であるが，A は単位元をもつ複素環なるゆえ，A の極大イデアル全体と一対一に対応する．さて A をディスク環としたとき M_A は単位閉円板 D と考えられる．なんとなれば φ を A の上の任意のトリビアルでない複素値準同型写像としたとき，$\varphi(z)=\lambda$ (z は $z(\zeta)\equiv\zeta$ なる関数) とおけば $|\lambda|=|\varphi(z)|\leqq\|z\|=1$ (定理 3·5 (ii)) なるゆえ複素数 $\lambda\in D$ となる．A の任意の関数は z の多項式で一様に近似されるゆえ，$\varphi(f)=f(\lambda)(f\in A)$．また逆に $|\lambda|\leqq1$ となる任意の複素数に対して $\varphi(f)=f(\lambda)$ ($f\in A$) とおけば，φ は A の上のトリビアルでない複素値準同型

写像となる．このようにして $M_A=D$ となったわけであるが，この場合 A の Šilov 境界 ∂_A は D の位相的境界 Γ（単位円）であり（最大値原理より），結局，上の Poisson 核のことはディスク環 A においては，$M_A-\partial_A$ の任意の点 s に対して $f(s)$ $(f\in A)$ の値は ∂_A の上の Poisson 積分で表わされるということになる．

Poisson 式表示を任意の X の上の関数環 A でこころみる．定理 3・14 より $M_A\supset X$ と見られ，また $M_A\ni\varphi$ に対して $f(\varphi)=\varphi(f)$ $(f\in A)$ とおけば，これにより f は M_A の上にまで連続的に拡張されるわけである．

さて M_A の任意の元 p に対して

$$T: f|\partial_A\to f(p)$$

という $A|\partial_A$ の上の線型汎関数 T を考える．ここで $f|\partial_A$ は $f(\in A)$ の ∂_A の上での縮小を表わし，$f(p)$ は上で説明したとおり $p(f)$ の意味である．ここで $|T(f|\partial_A)|=|f(p)|\leqq\|f\|=\|f\|_{\partial_A}$ なるゆえ，T のノルムは 1 となる．それゆえ Hahn-Banach の定理により，T は $C(\partial_A)$ の上のノルム 1 の線型汎関数に拡張され，それは ∂_A の上の一つの測度 μ_p として表現される（1・1 節 A項 a および h）．

すなわち

$$f(p)=\int_{\partial_A}f(x)d\mu_p(x) \qquad (f\in A).$$

ここで $T(1)=1$, μ_p の全測度 1 で $\int_{\partial_A}d\mu_p(x)=1$ なるゆえ測度 μ_p は正測度となるわけである．ゆえに $f\in A$ の $p\in M_A$ における値は ∂_A の上の正測度 μ_p で決定されることがわかったが，上の作り方からも明らかなようにこのような μ_p は一般には一意に定まらない．正測度 μ_p を **p を表現する測度**という．この μ_p について一，二の定理をつぎにあげる．

定理 4・14 Aを ∂_A の上で考えて条件 (P) を満たすとし，$p\in M_A-\partial_A$ とする．μ_p を p を表現する ∂_A の上の正測度とすれば μ_p の台は ∂_A に一致する．

証明 Kを μ_p の台とする．Kを ∂_A の真閉部分集合とすれば，

$f(p)=\int_K fd\mu_p (f\in A)$ なるゆえ

$$|f(p)| \leqq \sup\{|f(x)|;\ x \in K\}.$$

仮定より A は ∂_A の上で条件（P）を満たすゆえ $A|K$ は $C(K)$ で稠密．これは測度 μ_p が $C(K)$ の上の準同型写像なることを示し，その結果 μ_p は dirac 測定 $\delta_{x_0}(x_0 \in K)$，すなわち $\delta_{x_0}(f) = f(x_0)$ $(f \in C(K))$ なる測度でなければならない．これは $p \notin \partial_A$ に反する．　　*qed*

系 4·15　Aを ∂_A の上で考えて条件(P)を満たすとする．$f \in A$ を $\|f\| = 1$ とする．もしある $p \in M_A - \partial_A$ で $|f(p)| = 1$ ならfは定数関数である．

証明　μ_p をpを表現する測度とする．μ_p は全測度1となる正測度で，その台は ∂_A である．$\|f\| = 1$，$1 = |f(p)| = |\int_{\partial_A} f d\mu_p|$ なるゆえ ∂_A のすべての元 x で $f(x) = f(p)$ とならなければならない．すなわちfは定数である．

定理 4·16　AをXの上の関数環とし，$f \in A$ を $\|f\| = 1$ とする．$K = \{p \in M_A : f(p) = 1\}$ とおいたとき $A|K$ はまた関数環となりつぎの性質をもつ．

（i）　$M_{A|K} = K$.

（ii）　$\partial_{A|K} \subset \partial_A \cap K$.

（iii）　$K \ni p$ ならpを表現する ∂_A の上の任意の測度 μ_p の台は $K \cap \partial_A$ にふくまれる．

証明　もし必要ならばfの代わりに $(1/2)(1+f)$ を考えることにより $K = \{p \in M_A : |f(p)| = 1\}$ と仮定してよい．Kの上では$f=1$ で $M_A - K$ の上では $|f| < 1$ である．$I = \{g \in A : g(K) = 0\}$ とおけばIはAの閉イデアルとなる．ここで $A|K$ と剰余環 A/I は等長同型となる．なんとなれば $A/I \ni g_0 + I$ に対して $\|g_0 + I\| = \inf\{\|g + g_0\| : g \in I\}$ なるゆえ $\|g_0 + I\| \leqq \|g_0\|_K$．これはすべての$n$で $f^n g_0 \in g_0 + I$ で $\lim_{n \to \infty} \|f^n g_0\| = \|g_0\|_K$ となるからであり，また任意の $g_1 \in g_0 + I$ で $\lim_{n \to \infty} \|f^n g_1\| = \|g_0\|_K$ で $\|f^n g_1\| \leqq \|g_1\|$ なるゆえ $\|g_0\|_K \leqq \|g_0 + I\|$ も成立する．すなわち $A|K$ は A/I に等長同型となる．さて A/I は Banach 環なるゆえ $A|K$ も完備，ゆえに $A|K$ はKの上の関数環となる．
（i）の証明：$A|K$ から複素数体へのトリビアルでない準同型写像を φ とし $\varphi^*(g) = \varphi(g|K)$ とおけば $\varphi^* \in M_A$．ゆえにある $p \in M_A$ で $\varphi(g|K) = g(p)$．ここで $g = f$ とおけば $f(p) = 1$ となることがわかり $p \in K$ となる．（ii）は（iii）より明らかなるゆえ（iii）を証明する．$p \in K$ とし μ_p をpを表現する

測度とすれば f では

$$1=f(p)=\int_{\partial_A} f d\mu_p.$$

そして $||f||=1$ なるゆえ f は μ_p の台 P の上では恒等的に 1 でなければならない．ゆえに $P\subset K\cap\partial_A$ となる． qed/

注意 (1) 一般の関数環 A における，M_A の点 p における A の関数の値を A の Šilov 境界の上の積分で表わす，Poisson 式表示は Arens and Singer [文献 41)] による．

(2) さきに述べたように $M_A \ni p$ に対して，p を表現する測度は一意に定まらない．しかしある種の関数環に対してはそれが一意に定まることがわかっている．たとえば A がログモジュラー (logmodular) 環であるとき，すなわち $\{\log|f|,\ f\in A^{-1}\}$ が $C_R(X)$ の中で一様稠密であるときである．ここで A^{-1} とは f も $f^{-1}(=1/f)$ も A の関数であるような f の全体を表わす．ログモジュラー環は後で述べる Dirichlet 環をふくむもので Hoffman [文献 40)] が研究した．ログモジュラー環での p を表わす測度の一意性の証明もこの論文にのっている (Dirichlet 環の場合の証明は定理 4・21 の上)．

(3) 本質集合は Bear [文献 41)] により導入された．(P) を満たす環 (pervasive algebra) についてのくわしい性質については Hoffman and Singer [文献 42)] をみよ．

4・2 Bishop の定理 (Stone-Weierstrass の定理の拡張)

Weierstrass の古典的な多項式近似定理を拡張した，いわゆる Stone-Weierstrass の定理は第 3 章で証明されたが，そのとき注意したようにこの定理は関数環でも実環で考えるかあるいは，複素環でも自己随伴の場合にしか成立しない．それでは一般の (複素) 関数環の場合どのようになるのか．これに答えたのが Bishop の定理である．これはまたすでに Šilov [文献 43)] が一般の関数環を交代環によって表わせないかということを暗示していたのであるが，それに完全な解を与えたわけである．Bishop のもとの証明は Bishop [文献 44)] にあるが，ここでは Glicksberg [文献 45)] のものをあげる．

A をコンパクト Hausdorff 空間 X の上の関数環とする．X の部分集合 K が A の**交代集合** (antisymmetric set) であるといわれるのは，K の上で実数値をとる A の任意の関数は K の上で定数となるときにいう．

定理 4・17 (Bishop) A を X の上の関数環とする．そのとき X は互いに共通点のない閉集合 K_λ に分割され，つぎの条件を満たす．

（a） すべての K_λ は極大交代集合である．

（b） 任意の K_λ で，$A|K_\lambda$ は $C(K_\lambda)$ の中で閉である．

（c） X の上の連続関数 f がすべての λ で $f|K_\lambda \in A|K_\lambda$ ならば $f \in A$ となる．

この定理が Stone–Weierstrass の定理の拡張になっていることはつぎのようにしてわかる．いま A が自己随伴で X の二点を分離すると仮定する．そのとき $A=C(X)$ なることを証明しよう．それには（c）から任意の λ で K_λ が一点からなることを示せばよい．もしある K_{λ_0} が二点以上であったとし $K_{\lambda_0} \ni a, b$ とする．そのときある $f_0 \in A$ で $f_0(a) \neq f_0(b)$．ここで $\mathrm{Re} f_0(a) \neq \mathrm{Re} f_0(b)$ としてよい．$\bar{f}_0 \in A$ なるゆえ $g_0=(1/2)(f_0+\bar{f}_0) \in A$ で，g_0 は $g_0(a) \neq g_0(b)$ となりかつ g_0 は K_{λ_0} の上で実数値をとる．これは K_{λ_0} が交代集合であるゆえ不合理である．かくしてすべての K_λ が一点となり $A=C(X)$ である．

この定理を証明する前につぎの定理を証明しておく．

定理 4·18 （i） 任意の交代集合を含む極大交代集合が存在する．任意の二つの極大交代集合は一致するか，互いに共通点がない．

（ii） μ を $A^\perp$ の単位球の端点とする．そのとき μ の台は交代集合である．ここで $A^\perp$ はすべての $f \in A$ で $\int f d\nu=0$ となる X の上の測度 $d\nu$ の全体を表わす．

（iii） E を尖集合のある族の共通集合とする．そのとき $A|E$ は $C(E)$ で閉である．実際 $A|E$ は剰余環 A/kE と等長同型である．ここで X の部分集合 F が**尖集合** (peak set) であるとは，ある $f \in A$ で $F=\{x \in X : f(x)=\|f\|\}$ *) となっていることをいう．また $kE=\{f \in A : f(E)=0\}$ とする．

（iv） すべての極大交代集合は尖集合のある族の共通集合になっている．

（v） F は A の尖集合で $L(\subset F)$ は $A|F$ の尖集合であるとする．そのとき L は A の尖集合となる．

証明 （i） 一つの交代集合を含むすべての交代集合の集合和はやはり交代集合となり，交代集合の閉包はやはり交代集合である．それゆえ極大交代集合は閉集合であり，異なる二つの極大交代集合は共通点をもたない．

---

*) $g=(1/2)(\|f\|+f)$ とおくことによりある $g \in A$ で $F=\{x \in X : g(x)=\|g\|\}$，かつ $x \notin F$ なら $|g(x)|<\|g\|$ と考えることもできる．

(ii) μを $A^{\perp}$ の単位球の端点とし，その台をKとする．$A\ni f$ はKの上で実数値をとると仮定する．Aは定数関数をふくむからKの上で $0<f<1$ と仮定してよい．さて $f\mu$, $(1-f)\mu$ は 0 でない測度で

$$\mu=||f\mu||\cdot\frac{f\mu}{||f\mu||}+||(1-f)\mu||\cdot\frac{(1-f)\mu}{||(1-f)\mu||}$$

とかける．一方

$$||f\mu||+||(1-f)\mu||=\int fd|\mu|+\int(1-f)d|\mu|=\int d|\mu|=1.$$

しかし $f\mu$, $(1-f)\mu\in A^{\perp}$ は明らかなるゆえμが単位球の端点なることより，ある $\lambda>0$ で $(1-f)\mu=\lambda f\mu$ となる．これはKの上で $f\equiv 1/(\lambda+1)$ なることを示す．

(iii) これは定理 4・16 の証明で示されたものとほとんど同じ．$E\ni x$ に対して $f+kE\to f(x)$ は Banach 環 A/kE から複素数体 C へのトリビアルでない準同型写像なるゆえ，そのノルムは 1 である．すなわち $|f(x)|\leqq||f+kE||$ である．xはEの任意の元なるゆえ $||f|E||=\sup\{|f(x)|: x\in E\}\leqq||f+kE||$. 逆に$V$を$E$の開近傍で $\sup\{|f(x)|;\ x\in V\}\leqq||f|E||+\varepsilon$ のようにとる．Eは尖集合 $\{E_j\}$ の共通集合なるゆえ，そして $E=\cap E_j\subset V$ なるゆえ有限個の族 $\{E_{j_i}\}$が適当に選べて $E_{j_1}\cap E_{j_2}\cap\cdots\cap E_{j_n}\subset V$. $F=E_{j_1}\cap\cdots\cap E_{j_n}$ はまた一つの尖集合なることは明らかなるゆえ，その定義からある $g\in A$ で $g(F)=1$, かつ $x\notin F$ なら $|g(x)|<1$ である．しかし $g^nf\in f+kE$ で $\varlimsup_{n\to\infty}||g^nf||\leqq\sup|f(V)|\leqq||f|E||+\varepsilon$ である．その結果 $||f+kE||\leqq||f|E||$ となり $||f|E||=||f+kE||$. あとは定理 4・15 の証明と同じ．

(iv) まず可算個の尖集合の共通部分はやはり尖集合なることは明らか：E_i $(i=1, 2, 3, \cdots)$ を $f_i\in A$, $||f_i||=1$ で $E_i=\{x\in X: f_i(x)=1\}$, $E_i\not\ni x$ で $|f_i(x)|<1$ としたとき $f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}1/2^i f_i(x)$ とおけば $f\in A$, $||f||=1$ であって $\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i=\{x\in X: f(x)=1\}$ となるからである．Kを極大交代集合としたときKをふくむ尖集合全体の共通集合をEとする．$E=K$ となることを証明すればいいわけであるが，もし $E\supsetneqq K$ とするならば矛盾が出ることを示す．K の極大性からEは交代集合ではないから，ある $f\in A$ が存在して $f|E$ は実関数であ

って定数関数ではない．さて当然 $f(E)$ は複素平面上のコンパクト集合であるゆえ G_δ 集合である．それゆえ $f^{-1}(f(E))$ も X の中の G_δ 集合，すなわち $f^{-1}(f(E))=\bigcap_{n=1}^{\infty}V_n$（$V_n$ は X の開集合）となる．さてすべての n で $E\subset V_n$ で E は尖集合の共通集合なるゆえ一つの尖集合 F_n で $F_n\subset V_n$ となる．ゆえに $E\subset F=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}V_n=f^{-1}(f(E))$．始めに注意したように F は一つの尖集合であり $f(F)=f(E)$ となる．それゆえ $f|F$ は定数でない実数関数であるが，K は交代集合なるゆえ f は K の上では定数となる．$K\subset F$ となるから，ある多項式 p を適当にとることにより，$p(f)|F$ は K をふくむ F の真部分集合 L の上で 1 となり，$F-L$ の上ではその絶対値が 1 以下にすることができる．すなわち L は $A|F$ の一つの尖集合となる．後に証明する（v）により L 自身 A の尖集合となるわけである．しかし $p(f(E))=p(f(F))$ となるから L は E をふくむことはできない．なんとなれば $L\supset E$ なら $p(f)$ は L では定数であるが E の上ではそうでないからである．一方 L は K をふくむ尖集合なるゆえ $E\subset L$ とならなければならず不合理．ゆえに $E=K$ である．

（v） F は A の尖集合で $L(\subset F)$ は $A|F$ の尖集合であるから A のある元 f で $f(F)=1$ で $|f(x)|<1$ $(x\notin F)$ となり，A のある元 g で $g(L)=1$ で $|g(x)|<1$ $(x\in F-L)$ となる．いま正整数 n に対してつぎのようにおく．

$$G_n=\{x\in X:|g(x)|<1+2^{-n}\}$$

そのとき $x\notin G_n$ に対してある k_n が存在して

$$|f(x)|^{k_n}|g(x)|<2^{-n}\quad (x\notin G_n)$$

ここでつぎのように関数 g を定義する．

$$h=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}f^{k_n}g$$

$h\in A$ は明らかであるが，すべての n で $x\in G_n$ となれば $|g(x)|\leqq 1$ なるゆえ $|h(x)|\leqq 1$．つぎにある $n_0(\geqq 1)$ で $x\notin G_{n_0}$ とする．便宜上 $G_0=X$ とおくことにより，ある $m(\geqq 1)$ で $x\in G_{m-1}$ で $n\geqq m$ なるすべての n で $x\notin G_n$ となる．それゆえ

$$|(f^{k_n}g)(x)|<1+2^{-(m-1)}\qquad (n=1,2\cdots,m-1)$$

そして

$$|(f^{k_n}g)(x)|<2^{-n}\leqq 2^{-(m-1)} \qquad (n\geqq m)$$

それゆえ

$$|h(x)|<(1+2^{-(m-1)})\sum_{n=1}^{m-1}2^{-n}+2^{-(m-1)}\sum_{n=m}^{\infty}2^{-n}$$
$$\leqq(1+2^{-(m-1)})(1-2^{-(m-1)})+2^{-(m-1)}2^{-(m-1)}=1$$

$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$ の場合は $x\notin L$ なら $|h(x)|<1$ なることが容易にわかるから，結局 $\{x\in X:|h(x)|=1\}=L$ となり L は A の尖集合となった. qed

さてこれだけ準備をしておいて定理 4·17 の証明をする.

定理 4·17 の証明：求める $\{K_\lambda\}$ は A の極大交代集合全体とする. X を分割する $\{K_\lambda\}$ の存在は定理 4·18 (i) による. (b) は定理 4·18 の (iii), (iv) より明らか. さて (c) を証明するために $f\in C(X)$ が A にふくまれないと仮定する. Hahn-Banach の定理より $\mu\perp A$ (すなわち任意の $g\in A$ で $\int g d\mu=0$) なる測定 μ で $\mu(f)=1$ となるものが存在する. ゆえに $f\not\perp A^{\perp}$ となる. f は当然 $A^{\perp}$ の単位球と直交しない. Krein-Milman の定理 (1·1 節A項 f) より f は $A^{\perp}$ の単位球のある端点 ν と直交しない. 定理 4·18 (ii) より ν の台は交代集合なるゆえある K_λ にふくまれる. 仮定より K_λ の上で f はある A の元 h と等しい. ゆえに

$$\nu(f)=\int f d\nu=\int g d\nu=0$$

これは不合理なるゆえ (c) は証明された.

注意 上に述べた Bishop の定理に関連して, J. Tomiyama [文献 46)] は関数環 A をその極大イデアル空間 M_A の上の関数環と考えた場合に，つぎのことを示した.

A を X の上の関数環とし, A を極大イデアル空間 M_A の上の関数環として見たとき, M_A の極大交代集合の族を $\{K_\alpha\}$ とする. そのとき

(i) $\{K_\alpha\cap X\}$ は X の極大交代集合の族となる.

(ii) 一点からなる極大交代集合は, X の場合も M_A の場合も変わらない.

また A の本質集合 E との関係は，一点からなる極大交代集合の和集合を P としたとき, $E=X-P^i$ となる. P^i は X における P の内点の集合を表わすが, P を M_A の部分集合と見ての P の内点の集合としても同様の結果をうる.

4·3 Gleason 部分, Dirichlet 環

Aをコンパクト Hausdorff 空間Xの上の関数環とし, Aの極大イデアル空間を M_A とする. M_A の二つの元 x, y に対して

$$\sup\{|f(x)-f(y)|;\ f\in A,\ \|f\|<1\}<2$$

が成立するとき, この二つの点 x, y は同値であると定義し $x\sim y$ と書くことにする. そのときは

(i) $x\sim x$,

(ii) $x\sim y$ ならば $y\sim x$,

(iii) $x\sim y$, $y\sim z$ ならば $x\sim z$

となることをGleason [文献 47)] は指摘した. 同値である元の全体を**Gleason 部分** (Gleason part) という. この Gleason 部分は, A が Dirichlet 環の場合には複素平面上の単位開円板 (または一点) と同相となり, その上でAの関数を考えると単位開円板上で解析関数を考えることと同じになるという Wermer の定理などがあり, 関数環の研究には非常に重要な役割をなす. これらのことは後にゆずり, まず始めに Gleason 部分の存在から証明する. さきにあげた Gleason の論文には "$\sim$" が同値の条件 (i), (ii), (iii) を満たす証明がのせられていない. この証明はいろいろ考えられるようだが, ここでは Bear [文献 48)] にしたがって証明する.

定理 4·19 M_A の二点 x, y に対して $\sup\{|f(x)-f(y)| : f\in A,\ \|f\|<1\}<2$ となるとき $x\sim y$ と定義すれば, (i) $x\sim x$, (ii) $x\sim y$ なら $y\sim x$, (iii) $x\sim y$, $y\sim z$ なら $x\sim z$ となる.

証明 (i), (ii) はほとんど明らかであるから (iii) の証明をする. まず $x\sim y$ なることと, ある $a>0$ が存在して $\mathrm{Re}A$ の中の任意の正関数 u で $1/a<u(x)/u(y)<a$ となることは同等であることを証明する. もしそれが証明されれば (iii) は明らかである. 何となれば $x\sim y$, $y\sim z$ ならばある a, b が存在して

$$\frac{1}{a}<\frac{u(x)}{u(y)}<a \qquad (u\in\mathrm{Re}A,\ u>0)$$

$$\frac{1}{b}<\frac{u(y)}{u(z)}<b \qquad (u\in\mathrm{Re}A,\ u>0)$$

これから

$$\frac{1}{ab}<\frac{u(x)}{u(z)}<ab \qquad (u\in \mathrm{Re}A,\ u>0)$$

これは $x\sim z$ なることを示す．それゆえ $x\sim y$ なることと，ある $a>0$ で $1/a<u(x)/u(y)<a(u\in \mathrm{Re}A,\ u>0)$ の同等性を証明すればよい．まず後者が成立しないと仮定する．そのとき任意の $\varepsilon>0$ に対して正関数 $u\in \mathrm{Re}A$ が存在して $u(x)<\varepsilon$，$u(y)=1$（または $u(y)<\varepsilon$，$u(x)=1$）となる．ここである実関数 v で $u+iv\in A$ となるから $f=e^{-u-iv}$ とおけば $f\in A$ かつ $|f|=e^{-u}<1$, $|f(y)|=e^{-1}$ そして $|f(x)|>e^{-\varepsilon}$（または $|f(x)|=e^{-1}$，$|f(y)|>e^{-\varepsilon}$）．いいかえればそのノルム<1 である $f\in A$ が存在し $f(x)$（または $f(y)$）が単位円板の境界にいくらでも近づき $|f(y)|$（または $|f(x)|$）が e^{-1} に等しくなる．証明にはこの二つは x, y に対して対称的であるから前者の場合だけを考える．f を何乗かし，定数を加えたり掛けたりすることにより $A\supset\{f_n\}$, $\|f_n\|<1$ $(n=1,2,\cdots)$ が存在して $|f_n(x)|\to 1$ でかつ $f_n(y)=0$ $(n=1,2,\cdots)$ となる．さて $\lambda_n=f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ とおけば $|\lambda_n|<1$ となる．この $\{\lambda_n\}$ に対して一次関数の列 $\{L_n\}$ が存在し，L_n は単位円板をそれ自身にうつし，かつ

$$|L_n(0)-L_n(\lambda_n)|\to 2.$$

ところで L_n は単位円板の上で多項式で一様に近似させうるから $g_n=L_n\circ f_n\in A$, $\|g_n\|<1$ でかつ

$$|g_n(y)-g_n(x)|\to 2$$

となり，$x\not\sim y$.

つぎに $x\not\sim y$ とすれば，$\sup\{|g(x)-g(y)|;\ g\in A, \|g\|<1\}=2$ となる．ゆえに $A\supset\{g_n\}$, $\|g_n\|<1$ $(n=1,2,\cdots)$ が存在して $|g_n(x)-g_n(y)|\to 2$ となる．いま

$$f_n=\frac{1}{2}[g_n-g_n(x)]$$

とおけば $f_n\in A$, $\|f_n\|<1$ でかつ $|f_n(y)|\to 1$, $f_n(x)=0$ $(n=1,2,\cdots)$ となる．いま θ_n を適当にとり，$g_n=e^{i\theta_n}f_n$ が $g_n(y)=-|f_n(y)|$ $(n=1,2,\cdots)$ を満たすようにできる．$g_n=u_n+iv_n$ とおけば $\|g_n\|<1$, $u_n(y)\to -1$, $u_n(x)=0$ $(n=1,2,\cdots)$ となる．ここで $u_n'=u_n+1$ とおけば $u_n'\in \mathrm{Re}A$ であって $u_n'>0$, かつ $u_n'(y)\to 0$ で $u_n'(x)=1$．それゆえ $1/a<u_n'(x)/u_n'(y)<a$ $(n=1,2,\cdots)$

を満たす a が存在しなくなる.

このようにして Gleason 部分の存在がわかったが，このあと関数環において重要な位置をしめる Dirichlet 環について述べていく. *qed*

定義 A をコンパクト Hausdorff 空間 X の上の関数環とする. A が **Dirichlet 環**といわれるのは $\mathrm{Re}A$ が $C_R(X)$ において一様位相で稠密なときにいう*).

ディスク環や例3（4·1 節A項）などは Dirichlet 環であるが，つぎの Helson-Lowdenslager［文献 49)］の例も Dirichlet 環の有名な例である.

X をトーラスとする，すなわち二つの単位円の積とする. X の上のおのおのの連続関数 f に対し，つぎの複 Fourier 級数が対応する. すなわち

$$f(\theta,\psi)\sim\sum_{m,n}c_{mn}e^{im\theta}e^{in\psi}.$$

ここで Fourier 係数 c_{mn} はつぎで与えられる.

$$c_{mn}=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta,\psi)e^{-i(m\theta+n\psi)}d\theta d\psi.$$

いま平面上の格子点 (m, n) を考える. すなわち x 座標，y 座標ともに整数である点である. 格子点の集合 S が**半平面的**であるというのは，つぎのようなときにいう.

(i) 任意の二つの整数の対 m, n に対して格子点 (m, n) か $(-m, -n)$ かが S にふくまれる.

(ii) (m, n), $(m_0, n_0)\in S$ なら $(m+m_0, n+n_0)\in S$ となる.

S を半平面的な格子点の集合とする. トーラスの上の連続関数でそのFourier係数 a_{mn} が $(m, n)\notin S$ なるとき0となるものの全体を A とする. そのとき A は Dirichlet 環であることが証明される. よく出て来る格子点の半平面は α を固定した無理数としたとき，$S=\{(m, n): m+n\alpha\geqq 0\}$ である. Dirichlet 環は関数環の補間問題，Hardy 類 H^p の理論などで重要な役割を演ずるが，これらは後の節でくわしく述べる. ここではまず Dirichlet 環の Gleason 部分に関する Wermer［文献 50)］の定理を証明する.

定理 4·20 (Wermer) A をコンパクト Hausdorff 空間 X の上の Dirichlet

---

*) Dirichlet 環という名前は A をディスク環とし，X を単位円としたときに考えれば Dirichlet 問題，すなわち単位円の上の実連続関数を単位円板の上の調和関数に拡張する問題から端を発したと考えられる. p. 101 の脚注で，実連続関数については a_k は実数にとれる.

環とする．そのときAの Gleason 部分 P は一点であるか，そうでなければ単位開円板DからPの上への一対一連続写像τが存在して，Aの任意の関数fに対して $f(\tau(x))$ がDの上の解析関数となる．

この定理が示すように Dirichlet 環 A をその Gleason 部分（一点でないもの）に限って考えると，ある意味での解析性をもつわけである．Gleason 部分の一，二の例をあげる．

例 1 ディスク環 A を考える．その極大イデアル空間 M_A は前にも示したように複素平面の単位閉円板である．ここで単位開円板は一つの Gleason 部分である．なんとなれば $\|f\|<1$ となる任意の $f\in A$ に対して $g=f-f(0)$ とおく．g を M_A，すなわち単位閉円板上の関数と考えれば $|z|<1$ で解析的で $\|g\|\leqq\|f\|+|f(0)|<2$，かつ $g(0)=0$ であるからよく知られた Schwarz の定理（たとえば遠木［文献 51), p. 58］）により

$$|g(z)|\leqq 2|z| \qquad (|z|<1)$$

いま $|z_0|<1$ となる任意の z_0 では $|g(z_0)|\leqq 2|z_0|<2$ となるから，結局 $|f(z_0)-f(0)|<2$ $(\|f\|<1)$ となり $z_0\sim 0$．$|z|<1$ となる任意の z は 0 と同値となる．

例 2 Xを (t,z) $(0\leqq t\leqq 1$, z は複素数で $|z|=1)$ の全体とする．すなわち円筒の側面の形である．AをXの上で定義された t と z とで生成された環とする．これは Dirichlet 環となるわけであるが，この環の極大イデアル空間 M_A はこの円筒の中をうづめたもの，すなわち $\{(t,z):0\leqq t\leqq 1,\ |z|\leqq 1\}$ となることは明らかである．ここでは $P_t=\{(t,\ z):|z|<1\}$ $(0\leqq t\leqq 1)$ がそれぞれ一つの Gleason 部分になっていることが確かめられる．例 1 の場合も例 2 の場合にも出て来た Gleason 部分はそれ自身単位開円板で，そこで A を限って考えればAの任意の関数は解析関数となることは明らかであるが，これは最も単純な例で定理 4・20 はすべての Dirichlet 環に対して同じようなことがおこることを主張している．定理を証明するに際し多少の準備が必要となる．

4・1 節E項で，関数環Aの極大イデアル空間 M_A の元mに対しmを表現する測度 μ_m を定義した．すなわちXの上の全測度 1 の正測度 μ_m が存在して*)，任意の $f\in A$ に対してつぎのようになる．

---

*) 4・1 節Eでは μ_m は ∂_A の上の測度であったが，それはまたXの上の測度とみなすことができる．

$$f(m)=\int_X f d\mu_m \qquad (f\in A)$$

ここでAを Dirichlet 環とすればこの μ_m は一意にきまる．なんとなればこのような μ_m が二つあったとして，それを μ, μ' とする．$\mu-\mu'$ はもちろん実測度で$\int f(x)d(\mu-\mu')(x)=0$ $(f\in A)$ となる．それゆえ$\int g(x)d(\mu-\mu')(x)=0(g\in \mathrm{Re}A)$ となりAが Dirichlet 環（すなわち ReA は $C_R(X)$ で稠密）なることから$\int g(x)d(\mu-\mu')(x)=0$ $(g\in C_R(X))$ となる．これは $\mu-\mu'=0$ なることを示し $\mu=\mu'$.

定理 4·21 $\lambda_1, \lambda_2\in M_A$ で $\lambda_1\sim\lambda_2$ ならば μ_{λ_2} に対して可測であるような有界正関数φが存在してつぎのようになる．

$$d\mu_{\lambda_1}=\varphi\cdot d\mu_{\lambda_2}$$

証明 $\lambda_1\sim\lambda_2$ であるから定理 4·19 の証明より，定数Kが存在して，ReA の中の任意の正関数uで

$$\int u d\mu_{\lambda_1}\leqq K\int u d\mu_{\lambda_2}.$$

ところが，Aが Dirichlet 環であることから，Xの上の任意の正値連続関数fは ReA の中の正関数で一様に近似できる．以上のことから，任意の正値連続関数fで

$$\int f d\mu_{\lambda_1}\leqq K\int f d\mu_{\lambda 2}$$

となり定理は証明された． qed

さて M_A の中に点0を固定して $w=\mu_0$ とおく．ノルム $\|f\|$ を $\|f\|^2=\int_X |f|^2 dw$ と定め，$\|f\|<\infty$ となるwに関して可測なXの上の関数fの全体を L^2 とする．そして H^2 をつぎのように定義する：H^2はAを L^2 の部分空間と見てのAの L^2 のノルムによる閉包とする．また

$$H_0{}^2=\{f\in H^2 : \int f dw=0\},$$

$$\bar{H}^2=\{g : \bar{g}\in H^2\},$$

$$\bar{H}_0{}^2=\{g : \bar{g}\in H_0{}^2\}.$$

つぎに $\lambda\in M_A$, $\lambda\sim 0$ のとき φ_λ を前の定理 4・21 で求まった有界関数とする．すなわち $\varphi_\lambda\geqq 0$ により $d\mu_\lambda=\varphi_\lambda dw$ である．ゆえに

$$f(\lambda)=\int f\varphi_\lambda dw \qquad (f\in A)$$

ここで $g\in H^2$ に対しても $g(\lambda)=\int g\varphi_\lambda dw$ とおく．H^2 に関してつぎの定理が証明できる．

定理 4・22（i） $F, G\in H^2$ とする．そのとき

$$\int FG\,dw=\int Fdw\int Gdw.$$

（ii） $\{1\}$ を1で張られた L^2 の中の部分空間とする．そのとき L^2 はつぎのように互いに直交する三つの部分空間の直和となる．

$$L^2=H_0{}^2+\{1\}+\bar{H}_0{}^2.$$

（iii） F, $G\in H^2$ とするとき，つぎのようになる．

$$\int FG\varphi_\lambda dw=F(\lambda)\,G(\lambda).$$

もし F, $G\in H^2$, $F\cdot G\in L^2$ なら $F\cdot G\in H^2$ である．

（iv） B を $f\in A$, $Q\in B$ なら $f\cdot Q\in B$ となるような H^2 の一つの閉部分空間とする．そして1は B に直交していないと仮定する．そのとき $B\ni E_0$ が存在して $|E_0|=1$ (a,e) で，かつ B の中の任意の F に対して H^2 の関数 F^* が存在して $F=E_0F^*$ となる．

証明 （i） $F,G\in H^2$ より $\{f_n\}$, $\{g_n\}\subset A$ が存在して $f_n\to F\,(L^2)$, $g_n\to G\,(L^2)$ となる．そのとき

$$FG-f_ng_n=(F-f_n)\,g_n+(G-g_n)\,F$$

となり

$$\left|\int FG\,dw-\int f_ng_ndw\right|=\left|\int (F-f_n)g_ndw+\int (G-g_n)Fdw\right|$$
$$\leqq ||F-f_n||\;||g_n||+||G-g_n||\;||F||\to 0 \quad (n\to\infty).$$

ところが $\int f_ng_ndw=f_n(0)g_n(0)$ であるから

$$\int FGdw=\lim_{n\to\infty}f_n(0)g_n(0).$$

さて

$$|f_n(0)-\int F dw|=\left|\int (f_n-F)dw\right|\leqq \|f_n-F\|\,\|1\|$$

の右辺が 0 に収束するゆえ $f_n(0)\to\int F dw$. 同様にして $g_n(0)\to\int G dw$ となり証明された.

（ii） $f\in H_0^2$, $g\in \bar{H}_0^2+\{1\}$ とする. そのときもちろん $\bar{g}\in H^2$ となる. それゆえ上の（ｉ）より

$$(f,\ g)=\int f\bar{g}dw=\int f dw\cdot\int \bar{g}dw=0.$$

かくして $H_0^2\perp\bar{H}_0^2+\{1\}$ が示された. また $\bar{H}_0^2\perp\{1\}$は明らか. いま $F\perp H_0^2+\{1\}+\bar{H}_0^2$ としたとき $F=0$ が証明できれば（ii）は証明されたことになる. $f\in A$ とすれば $f\in H_0^2+\{1\}$ となるから$\int f\bar{F}dw=0$ となる. また $f\in A$ ならもちろん $\bar{f}\in\bar{H}^2$. しかし $\bar{H}^2=\bar{H}_0^2+\{1\}$ なるゆえ$\int \bar{f}\bar{F}dw=0$ である. それゆえ $\bar{F}dw$ は $\mathrm{Re}A$ と直交する測度となり前に注意したように A が Dirichlet 環であることから $\bar{F}$ の実数部分, 虚数部分がおのおの 0 となりその結果 F は $a.e$ に 0 となる.

（iii） 始めの方の等式は（ｉ）の中の証明と同様にしてできる. $f\in A$, $fF\in H^2$ ならば

$$\int fFGdw=(fF)(0)G(0)=f(0)F(0)G(0).$$

それゆえ $\bar{F}\bar{G}$ は $f(0)=0$ となる任意の $f\in A$ と直交する. ゆえに H_0^2 と直交するから $\bar{F}\bar{G}\in\bar{H}^2$ ((ii) により). これは $FG\in H^2$ を意味する.

（iv） LをBの上への 1 の射影とする. 仮定よりLは 0 ではない：$1-L\perp B$. さて $H\in B$ とする. $f\in A$ なら $fH\in B$ であるゆえ$\int fH(1-\bar{L})dw=0$. これを書きかえれば

$$f(0)H(0)=\int fHdw=\int fH\bar{L}dw.$$

ゆえに $f(0)=0$ となる $f\in A$ では $\int fH\bar{L}dw=0$ となる. $L\in B$ となること

からとくに $H=L$ とおけば

$$\int f|L|^2 dw=0 \qquad (f\in A,\ f(0)=0).$$

これから測度 $|L|^2dw$ は dw の定数倍となり（後の 5・1 節A項参照），その結果 $|L|$ は $a.e.$ に定数 α と一致する．また $\alpha\neq 0$ も明らかである．つぎに $\{fL; f\in A\}$ は B の稠密部分空間なることを示す．もしそうでなければ，0 でない $K\in B$ で $K\perp AL=\{fL: f\in A\}$ となる．それゆえ $\int fL\bar{K}dw=0$ $(f\in A)$．ところで $f(0)=0$ となる $f\in A$ で $\int f\bar{L}Kdw=0$ となることは前に示した（$H=K$ とおく）．それゆえ任意の $f\in A$ で $\int (f-f(0))\bar{L}Kdw=0$．すなわち $\int f\bar{L}Kdw=f(0)\int \bar{L}Kdw$．しかし $\int \bar{L}Kdw=0$．なんとなれば $\int fL\bar{K}dw=0$ $(f\in A)$ は前に示されたが，ここで $f=1$ とおけば $\int L\bar{K}dw=0$，ゆえに $\int \bar{L}Kdw=0$ となるからである．それゆえ $\int f\bar{L}Kdw=0$ $(f\in A)$．これから $\int \bar{f}L\bar{K}dw=(\overline{\int f\bar{L}Kdw})=0$ $(f\in A)$ となるが，さきに示した $\int fL\bar{K}dw=0$ $(f\in A)$ も考え合わせると測度 $L\bar{K}dw$ は ReA と直交することになり $L\bar{K}=0(a.e)$．$|L|\equiv\alpha\neq 0$ から $K=0(a.e.)$ となり不合理．これは AL が B の中で稠密であることを示している．いま B の元 F を固定する．そのとき A の中に関数列 $\{f_n\}$ が存在して $f_nL\to F(L^2)$．それゆえ $f_n\cdot\alpha^2\to F\bar{L}(L^2)$ となり $F\bar{L}\in H^2$．しかし $F=\{((1/\alpha)F\bar{L})\cdot((1/\alpha)L)\}$ なるゆえ $E_0=(1/\alpha)L$, $F^*=(1/\alpha)F\bar{L}$ とおけば $F=E_0F^*$． *qed*

ここで定理 4・20（Wermer の定理）の証明に移ろう．三段にわけて証明する．

（第一段） $m\in M_A$ を $m\neq 0$, $m\sim 0$ とする．そのとき $E_0\in H^2$, $|E_0|=1(a.e.)$ となる関数 E_0 が存在してつぎが満たされることを示そう：$E_0(m)=0$, $|E_0(\lambda)|<1(\lambda\in M_A,\ \lambda\sim 0)$，かつ $f\in H^2$ なら $|z|<1$ の上の解析関数 $\hat{f}$ が存在して，$\lambda\in M_A$, $\lambda\sim 0$ なる λ で $\hat{f}(E_0(\lambda))=f(\lambda)$ となる．いま $B_m=\{f\in H^2: f(m)=0\}$ とおけば B_m は H^2 の閉部分空間で前定理 4.22（iv）の仮定を満たす．実際 $(f, 1)=f(0)$ であるから $f(0)\neq 0$, $f(m)=0$ となる $f\in A$ が存在するゆえ，1は B_m と直交しない．前定理（iv）より $E_0\in B_m$, $|E_0|=1$ $(a.e.)$ なる関数 E_0 が存在して，任意の $f\in H^2$ に対して，ある $g\in H^2$ が存在して

$f-f(m)=E_0\cdot g$. かくして $g=E_0^{-1}(f-f(m))\in H^2$. ゆえにここでつぎのような H^2 の上の線型作用素 T が定義できる.

$$T: f\to E_0^{-1}(f-f(m))$$

さて H^2 の中に新しい内積を定義しよう：$(f,g)_m=\int f\bar{g}\varphi_m dw$ (ここで φ_m は定理 4·22 の前に定義したものを表わす). この新しい内積から導かれたノルムで $||T||$ を計算する. これを $||T||_m$ と書くことにする.

$$||Tf||_m^2=\int|f-f(m)|^2\varphi_m dw=||f-f(m)||_m^2.$$

しかし $(f-f(m),1)_m=\int(f-f(m))\varphi_m dw=0$ であるから

$$||f-f(m)||_m^2+||f(m)||_m^2=||f||_m^2.$$

これから $||Tf||_m^2\leqq||f||_m^2$, すなわち $||T||_m\leqq 1$ となる. したがって任意の正整数 n で $||T^n||_m\leqq 1$. $||f||_m$, $||f||$ の二つのノルムは同値であるゆえ, ある定数 γ で $||T^n||\leqq\gamma$ $(n=0,1,2,\cdots)$ となることは明らか.

さて任意の自然数 N と $f\in H^2$ に対して

$$f=\sum_{\nu=0}^{N-1}(T^\nu f)(m)E_0^\nu+T^N f\cdot E_0^N$$

となることは帰納法によって容易に証明できる. ここで $T^0 f=f$ であると理解する. 前定理 (iii) より任意の n で $E_0^n\in H^2$ で, かつ $\lambda\sim 0$ なら

$$f(\lambda)=\sum_{\nu=0}^{N-1}(T^\nu f)(m)E_0(\lambda)^\nu+(T^N f)(\lambda)\cdot E_0(\lambda)^N.$$

ここで $\lambda\sim 0$ なるゆえ前に示したように測度 $d\mu_\lambda$ と dw は互いに他に関して絶対連続*) となる. さて $E_0(\lambda)=\int E_0 d\mu_\lambda$ であり $|E_0|=1$ $(a.e.\ dw)$ なるゆえ $|E_0(\lambda)|=1$ となる λ では $E_0=e^{i\theta_0}(a.e.\ d\mu_\lambda)$ となるから $E_0=e^{i\theta_0}(a.e.\ dw)$ となり, これから

$$E_0(m)=\int E_0\varphi_m dw=e^{i\theta_0}$$

しかし $E_0(m)=0$ であるから $|E_0(\lambda)|<1$ となる. ところで

$$|T^N f(\lambda)|=\left|\int T^N f\varphi_\lambda dw\right|\leqq||T^N f||\cdot||\varphi_\lambda||$$
$$\leqq||T^N||\,||f||\,||\varphi_\lambda||\leqq\gamma||f||\cdot||\varphi_\lambda||.$$

---

*) 5·1 節 p. 148 参照.

それゆえ $|(T^N f)(\lambda)E_0(\lambda)^N| \leq K|E_0(\lambda)|^N$（$K$：定数）であるからつぎが成立する．

$$(T^N f)(\lambda)E_0(\lambda)^N \to 0 \qquad (\lambda \sim 0)$$

それゆえ

$$f(\lambda)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(T^\nu f)(m)E_0(\lambda)^\nu \quad (\lambda\sim 0)$$

ここでつぎのように定義する．

$$\hat{f}(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(T^\nu f)(m)z^\nu$$

$(T^\nu f)(m)$　$(\nu=0,1,2,\cdots)$ は有界列であるから $\hat{f}$ は $|z|<1$ で解析関数となる．また $\lambda\sim 0$ となる λ で $f(\lambda)=\hat{f}(E_0(\lambda))$ となることも明らか．

（第二段）今度はつぎのことを証明する：P を点 0 をふくむ M_A の Gleason 部分とする．そして P は $m(\neq 0)$ もふくむとする．E_0 を第一段で求められた関数とすればそのとき E_0 は P の上では一対一で，P を $|z|<1$ の上に写す．いま $\lambda_1,\lambda_2\in P$ で $E_0(\lambda_1)=E_0(\lambda_2)$ と仮定する．そのとき $\lambda_1=\lambda_2$ となること，すなわち E_0 が一対一であることを証明する．$E_0(\lambda_1)=E_0(\lambda_2)$ から任意の $f\in H^2$ に対して $f(\lambda_1)=f(\lambda_2)$ となるからもちろん $f\in A$ に対してもそうである．その結果 $\lambda_1=\lambda_2$ となる．さて T を第一段で定義した H^2 の上の作用素とする．そのとき $f,g\in H^2$，$p>0$ に対してつぎのことを証明する．

$$T^p(fg)(m)=\sum_{r=0}^{p}(T^r f)(m)(T^{p-r}g)(m)$$

第一段の証明の中で，f，g はつぎのような形にかけることが示された．

$$f=\sum_{\nu=0}^{p}(T^\nu f)(m)E_0^\nu+T^{p+1}f\cdot E_0^{p+1}$$

$$g=\sum_{\nu=0}^{p}(T^\nu g)(m)E_0^\nu+T^{p+1}g\cdot E_0^{p+1}$$

それゆえ

$$fg=\sum_{n=0}^{p}\left(\sum_{r=0}^{n}T^\nu f(m)\,T^{n-r}g(m)\right)E_0^n+R_p\cdot E_0^{p+1}$$

ここで R_p は H^2 の一つの関数である．

さて $hE_0^n(h\in H^2)$ の形の関数に T^p をほどこすと，どんな形になるかを計算してみる．

$$T(hE_0{}^n)=(hE_0{}^n-0)E_0{}^{-1}=hE_0{}^{n-1}$$

これをくりかえして

$$T^p(hE_0{}^n)=hE_0{}^{n-p} \qquad (p\leqq n)$$

$$T^p(E_0{}^n)=0 \qquad (n<p)$$

それゆえ上の式より

$$T^p(fg)=\sum_{r=0}^{p}(T^rf)(m)\,(T^{p-r}g)(m)+R_pE_0$$

このことからつぎがいえる.

$$T^p(fg)(m)=\sum_{r=0}^{p}(T^rf)(m)\,(T^{p-r}g)(m)$$

ここでまた第一段で定義した $\hat{f}$ では

$$(\widehat{fg})(z)=\sum_{n=0}^{\infty}T^n(fg)(m)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{n}T^\nu f(m)\,T^{n-\nu}g(m)\right)z^n$$

$$=\left(\sum_{i=0}^{\infty}T^if(m)z^i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{\infty}T^jg(m)z^j\right)=\hat{f}(z)\hat{g}(z)$$

いま $|\alpha|<1$ となる複素数 α を固定する. $A\ni f$ に対して $\hat{f}(\alpha)$ を対応させる写像を L_α とする. L_α は A の上で線型で，また上で見たように乗法写像となる. それゆえある $\lambda_\alpha\in M_A$ で

$$f(\lambda_\alpha)=\hat{f}(\alpha) \qquad (f\in A)$$

つぎに $\lambda_\alpha\in P$ なることを証明する. 絶対値が1より小さい二つの複素数の対 $(\alpha,\,E_0(0))$ に対して2より小さい定数 K が存在して, $|z|<1$ において $|F|\leqq 1$ となるすべての解析関数 F に対して $|F(\alpha)-F(E_0(0))|<K$ となることは（定理 4·19 の後の例1）において注意した. さて $\|f\|_\infty\leqq 1$ となる A の元を f とする. そのとき $|z|<1$ で $|\hat{f}|\leqq 1$. なんとなれば $L_z(f)=\hat{f}(z)$ とおくとき L_z は A の上の線型乗法汎関数なるゆえ，よく知られているように $\|L_z\|=1$. ゆえに $|\hat{f}(z)|\leqq\|f\|_\infty$ となるからである. ここで $\hat{f}$ は解析関数なるゆえ $|\hat{f}(\alpha)-\hat{f}(E_0(0))|<K$, ゆえに $|f(\lambda_\alpha)-f(0)|=|\hat{f}(\alpha)-\hat{f}(E_0(0))|<K$ となり Gleason 部分の定義により $\lambda_\alpha\sim 0$, すなわち $\lambda_\alpha\in P$ となる. さて $f\in H^2$ を固定する. そのとき H^2 の定義より A の中の関数列 f_n が存在して $f_n\to f(H^2)$ となる. そのとき

$$\hat{f}_n(\alpha)-\hat{f}(\alpha)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(T^\nu f_n(m)-T^\nu f(m))\alpha^\nu$$

ゆえに

$$|\hat{f}(\alpha)-\hat{f}(\alpha)|\leqq\sum_{\nu=1}^{\infty}r||f_n-f||\,||\varphi_m||\cdot|\alpha|^{\nu}$$

それゆえ $\hat{f}_n(\alpha)\to\hat{f}(\alpha)$ $(n\to\infty)$ となる．また $f_n(\lambda_\alpha)=(f_n,\ \varphi_{\lambda_\alpha})\to(f,\ \varphi_{\lambda_\alpha})=f(\lambda_\alpha)$ なるゆえ $f_n(\lambda_\alpha)=\hat{f}_n(\alpha)$ に注意すれば $f(\lambda_\alpha)=\hat{f}(\alpha)$ $(f\in H^2)$ となる．とくに $E_0(\lambda_\alpha)=\hat{E}_0(\alpha)$ となるが $\hat{E}_0(z)=z$ となることを考えに入れれば $E_0(\lambda_\alpha)=\alpha$ が得られる．かくして写像 E_0 はPを $|z|<1$ の上に写す．

（第3段） Pを M_A の Gleason 部分とし $0\in P$ とする．もしPが一点でなければ第一段，第二段で示されたように写像 E_0 はPを $|z|<1$ の上に写す．τ を E_0 の逆写像とすればτは $|z|<1$ を P の上に写し，一対一写像である．そしてまたすべての $f\in A$ で $f(\tau(z))=\hat{f}(z)$ で $f\tau$ は $|z|<1$ の上の解析関数となる．最後にτが $|z|<1$ の上で連続となることを証明する．いまτが z_0 で連続でないとすれば $|z|<1$ の上で $z_j\to z_0$ となるのに $\tau(z_j)\not\to\tau(z_0)$ となり，M_A はコンパクトなるゆえ $\tau(z_j)$ のある部分列は $\tau(z_0)$ と異なる M_A の点 p_0 に収束する．それゆえ任意の $f\in A$ で $f\tau(z_0)=f(p_0)$ ($f\tau$ が連続なるゆえ)．これは $\tau(z_0)=p_0$ なることを示し不合理である．以上で Wermer の定理は証明された． *qed*

注意 Gleason 部分についての研究は，最近も盛んになされているが，そのいくつかを証明なしにあげておこう．

（1） AがXの上のログモジュラー環（4·1 節E項の注意）であるときも，上のような Gleason 部分に関する Wermer の定理は成り立つ．これは Hoffman [文献 40)] によって証明された．また Wermer [文献 52)] の研究もある．

（2） 上で証明したように，Dirichlet 環Aの Gleason 部分は一点であるか，複素平面上の開円板に同相となる．いずれにしても連結集合である．そこでつぎのような問題が考えられる：任意の関数環の Gleason 部分は連結集合であるか．これは J. Garnett により否定的に解かれた．その結果はつぎのようである．

a． 2個の生成元をもつ関数環Aで，つぎのようなものが存在する：M_A は共通点がない二つの開円板の集合和に同相であるような Gleason 部分をふくむ (Garnett [文献 53)]．

b． さらにつぎのことがいえる：K を任意の σ-コンパクト完全正則空間としたとき，関数環Aが存在して，Kは M_A のある Gleason 部分と同相である．いいかえれば σ-コンパクト完全正則空間はすべて，Gleason 部分になりうる (Garnett [文献 54)])．

4・4 関数環の補間集合

複素平面上の単位円Γの任意の Lebesgue 測度0の閉集合Kを考える. Fatou〔文献 55)〕はちょうどKの上で0となるΓの上の連続関数で, Γの内側へ解析的に拡張できるものが存在することを証明した. さらに Rudin〔文献 56)〕はこの Fatou の結果を拡張し, つぎのことを証明した: 単位円Γの任意の Lebesgue 測度0の閉集合Kの上で定義された任意の連続関数は, 単位閉円板の上で連続でその内点で解析的な関数に拡張できる. これらは後で証明することにするが, これを記号的に書けばつぎのようになる. すなわちディスク環をAとすれば, $A|K=C(K)$ということである. ここで$A|K$は前にも定義したがAの元をKの上に縮小 (restriction) したものの全体を表わす. 一般にAをコンパクト Hausdorff 空間Xの上の関数環としたとき, Xの閉集合Kが$A|K=C(K)$を満たすときKをAの**補間集合** (interpolation set) とよぶことにする. ディスク環Aでは Lebesgue 測度0の閉集合 (Γの上の) が補間集合となる. まずディスク環における補間集合を考え, それを一般の関数環の場合に拡張していこう.

A. 予備知識

ディスク環Aの定義は前に述べたが, それは単位円の上での多項式$p(z)$全体の一様ノルムでの閉包とも考えられ, 一方その Fourier 係数a_nの負の項 ($n=-1, -2, -3, \cdots$) がすべて0になる単位円の上の連続関数全体とも考えられる.

いまfを単位円Γの上の実数値 Lebesgue 積分可能関数とする. そのとき

$$h(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}f(\theta)d\theta$$

は単位開円板$|z|<1$の上で解析的であり, hの実数部分はfの Poisson 積分になっている. $h=u+iv$とおけば調和関数uは$a.e.\ \theta$に極限$\lim_{r\to 1}u(re^{i\theta})$をもち, 単位円の上でそれが$f(e^{i\theta})$とほとんどいたるところで一致する. しかし$v$についてはどうか. いいかえれば$Q_r$を共役 Poisson 核, すなわち

$$Q_r(t)=\operatorname{Im}\frac{1+re^{it}}{1-re^{it}}=\frac{2r\sin t}{1-2r\cos t+r^2}$$

とおいたとき $v(r,\theta)=v(re^{i\theta})$ とおけば

$$v(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta-t)Q_r(t)dt$$

となるが，v は単位円のほとんどすべての点 $e^{i\theta}$ において $\lim_{r\to1}v(r,\ \theta)$ をもっているかということである．答は肯定的であって，かつつぎのことがいえる．

定理 4・23 f は単位円 Γ の上の Lebesgue 積分可能関数とする．そしてつぎのようにおく．

$$v(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta-t)Q_r(t)dt.$$

もし θ が

$$v(\theta)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\theta+t)-f(\theta-t)}{2\tan\frac{1}{2}t}dt$$

が存在する任意の角とすれば，その θ で*)

$$\lim_{r\to1}v(r,\theta)=v(\theta).$$

証明 $\phi_\theta(t)=(f(\theta+t)-f(\theta-t))/(2\tan 1/2\,t)$ とおく．仮定より ϕ_θ は積分可能となる．ここで

$$v(r,\theta)-v(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi_\theta(t)\left[1-\frac{2r\sin t\tan 1/2\,t}{1-2r\cos t+r^2}\right]dt$$

となるが，これは $v(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta-t)Q_r(t)dt=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta+t)Q_r(t)dt$ $=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1/2(f(\theta+t)-f(\theta-t))Q_r(t)dt$ となることから明らか．この式の右辺を整頓すれば

$$v(r,\theta)-v(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi_\theta(t)\frac{(1-r)^2}{1-2r\cos t+r^2}dt.$$

さて $g_r(t)$ をつぎのようにおく．

$$g_r(t)=\frac{(1-r)^2}{1-2r\cos t+r^2}$$

そのとき $t\neq0$ なら $0<g_r(t)<1$ で $\lim_{r\to1}g_r(t)=0$．ϕ_θ は積分可能なるゆえ $\int\phi_\theta g_r\,dt\to0\ (r\to1)$ でこれは $\lim_{r\to1}v(r,\theta)=v(\theta)$ なることを示している．qed

*) $a.\ e.\ \theta$ で $v(\theta)$ が存在することがいえる．

系 4·24 f が θ で微分可能なら $\lim_{r\to 1} v(r, \theta)=v(\theta)$ となる．もし f が閉区間 $|\theta-\theta_0|\leqq\delta$ で連続的微分可能なら $v(r,\theta)$ はこの区間の上で $r\to 1$ のとき一様に v に収束する．

証明 ϕ_θ は区間 $|t|\geqq\varepsilon>0$（ε 任意）で積分可能なることは明らか．ゆえに f は θ で微分可能ならば ϕ_θ は $t\to 0$ で有界となるから，それは積分可能となる．また f が $|\theta-\theta_0|\leqq\delta$ で連続的微分可能なら t を小さくすれば，$|\theta-\theta_0|\leqq\delta$ で ϕ_θ は一様に有界．これは $v(r,\theta)$ が $v(\theta)$ に一様に収束することを示す． qed

この系を用いてつぎの Fatou の定理を証明する．

定理 4·25（Fatou） K を単位円 Γ の上の Lebesgue 測度 0 の閉集合とする．そのとき K の上でちょうど 0 となる単位閉円板の上で連続でかつその内点（単位開円板）で解析的な関数が存在する．

証明 まず単位円の上で定義された関数 w でつぎの条件を満たすものが存在することをいう．

（i） w は単位円の上で $\geqq-\infty$ であり，K の上で $-\infty$ をとる．そして $e^{i\theta}$ が K の点に近づくと連続的に $-\infty$ に近づく．

（ii） 単位円上で $w\leqq-1$ である．

（iii） $\Gamma-K$ の上で w は有限値をとり，連続的に微分可能である．

（iv） w は積分可能である．

このような関数 w を作ろう．K は Γ で閉集合であるから $\Gamma-K$ は互いに共通点がない可付番無限個の開弧 I_n の集合和となる（K は Lebesgue 測度 0）．ε_n を I_n の長さとする．I_n の上で定義された関数 y_n は，I_n 上いたるところ正で連続的微分可能，$y_n\leqq e^{-1}$ かつ $y_n(\theta)$ が I_n のはしの点において 0 に収束しているとする．そしてまた $\int_{I_n}\log y_n\,d\theta\geqq-2\varepsilon_n$ となっているとする．そのような関数 y_n は容易に作れる．つぎに Γ の上での関数 y を定義する．

$$\begin{aligned} y(\theta)&=0 && (\theta\in K)\\ &=y_n(\theta) && (\theta\in I_n,\ n=1,2,3,\cdots)\end{aligned}$$

そのとき $0\leqq y\leqq e^{-1}$ となり y の 0 点は精密に K となる．また y は Γ の上で連続で，かつ $\Gamma-K$ の上で連続的微分可能になることは明らかである．ここで $\log y$ は積分可能となる．なんとなれば $\int_{I_n}\log y_n\,d\theta\geqq-2\varepsilon_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$

で，かつKの Lebesgue 測度が0であるからである．いま $w=\log y$ とおき $h(z)$ をつぎのように定義する．

$$h(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}w(\theta)d\theta.$$

そのときhは単位開円板 $|z|<1$ で解析的，かつ $\mathrm{Re}\,h\leqq 1$ となる．(iii) と上の系 (4・24) によりhはK以外の単位閉円板の各点で連続となる．wはKのおのおのの点で$-\infty$に連続的に収束するゆえ

$$\mathrm{Re}\,h(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}w(t)P_r(\theta-t)dt$$

はKのおのおのの点θに対し$-\infty$にはやく収束する．さて $g=1/h$ とおけば $g\in A$ なることは明らかで，$\mathrm{Re}\,g\leqq 0$ で，かつgの0点はKの点のみとなる．

qed

ディスク環においては補間集合はつぎのようになる．

定理 4・26 (Rudin)　Aをディスク環としたとき，単位円上の任意の Lebesgue 測度0の閉集合KはAの補間集合である．いいかえればKの上で定義された任意の複素連続関数は，単位閉円板上で連続で，かつその内点（単位開円板）で解析的な関数に拡張できる．

証明　Kは空集合でないと考えてよい．そのときKは尖集合（定理 4・18 (iii)）となる．すなわちある $f_0\in A$ で $f_0(K)=1$，かつ $|f(z)|<1\,(z\notin K)$ なることは前の定理（Fatou）の証明の中で求めたgで $f=e^g$ とおいて考えればよい．証明すべきことは $A|K=C(K)$ であるが，それには $A|K$ が $C(K)$ で閉であることと稠密であることがいえればよい．$A|K$ は $C(K)$ で閉であることはKが尖集合なることからわかる（定理 4・18 (iii)）から $A|K$ が $C(K)$ で稠密であることを証明すればよい．これはKがΓの真閉部分集合であれば成り立つ，すなわちディスク環Aは条件（P）を満たすわけである．これはAが極大環であること（定理 4・11）とつぎに示すように本質環であることから定理 4・8 より明らかである．Aが本質環であることはFをXの任意の真閉部分集合としたとき，その上で0でかつ $\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\theta}f(\theta)d\theta\neq 0$ となるようなΓの上の連続関数 $f(\theta)$ の存在は明らかであるからである．　*qed*

注意　この定理は直接にも証明できる（巻末文献⑧，p. 81）．

B. 補間集合

これから一般の関数環における補間集合を考える．定理 4·26 でも見たように $A|F$ が $C(F)$ で閉となるような X の中の閉集合 F は補間集合の理論において重要な役割をもつ．つぎにそのような集合について考える．

定理 4·27 A を X の上の関数環とし，F を X の閉集合とする．$A|F$ が $C(F)$ で閉となる必十条件は，ある $c(\geqq 1)$ が存在して

$$\|\nu-(A|F)^{\perp}\| \leqq c\|\nu-A^{\perp}\| \qquad (\nu\in\mathfrak{M}(F)) \quad (*)$$

が成立することである．ここで $\mathfrak{M}(F)$ は F の上で定義された複素値測度の全体を表わし，$(A|F)^{\perp}$ は $\mathfrak{M}(F)$ の元で $A|F$ の任意の元と直交するもの全体を表わす．また上の式が成立すれば $A|F$ と剰余環 A/kF とは同相同型となり，とくに $c=1$ なら両者は等長同型となる．ここで $kF=\{f\in A: f(F)=0\}$.

証明 A から $A|F$ の閉包 $(A|F)^{-}$ への写像 $T: f\to f|F$ を考える．A と $(A|F)^{-}$ の共役空間 (conjugate space) はそれぞれ $\mathfrak{M}(X)/A^{\perp}, \mathfrak{M}(F)/(A|F)^{\perp}$ と考えられるから T の共役作用素 T^* は $\mathfrak{M}(F)/(A|F)^{\perp}$ の元 $\nu-(A|F)^{\perp}$ を $\mathfrak{M}(X)/A^{\perp}$ の元 $\nu-A^{\perp}$ に写す．ゆえに $\|T^*\|=\|T\|\leqq 1$ なることから

$$\|\nu-A^{\perp}\| \leqq \|\nu-(A|F)^{\perp}\| \qquad (\nu\in\mathfrak{M}(F))$$

一方 $\nu\in A^{\perp}\cap\mathfrak{M}(F)$ は $\nu\in(A|F)^{\perp}$ を表わすから T^* は一対一写像となる．かくして条件 (*) は T^* が同相同型であることと同等である．これはまた開写像定理 (1·1 節A項 c) により T^* の像が閉であることと同等であり，また T の像が閉であると同等である．これは前半が証明されたことを示している．さて条件 (*) が成立すれば T の像は閉集合 $A|F$ である．それゆえ開写像定理より T は開写像である．kF はもちろん T の核なるゆえ，これから導かれた一対一写像 $\tilde{T}: A/kF\to A|F$ は位相的である．他方，その共役作用素 $\tilde{T}^*$ は T^* と一致する．これは $(A/kF)^*$ は A^* の部分空間と考えられるからである．その結果 $\tilde{T}$ と $\tilde{T}^{-1}$ のノルムは $\tilde{T}^*=T^*, (\tilde{T}^{-1})^*=(\tilde{T}^*)^{-1}=(T^*)^{-1}$ からわかる．条件 (*) より $\|\tilde{T}^{-1}\|\leqq c\|\tilde{T}\|\leqq 1$ となる．それゆえ $c=1$ となれば $\tilde{T}$ は等長同型である． *qed*

この定理から F が補間集合となる必十条件が出る．

定理 4·28 A を X の上の関数環とし，F を X の閉集合とする．F は A の補間集合である必十条件はある定数 $c\geqq 1$ が存在して

$$\|\mu_F\| \leqq c\|\mu_{X-F}\| \qquad (\mu \perp A) \qquad (**)$$

もし $c=1$ なら $C(F)(=A|F)$ から A/kF への等長同型写像が存在する．ここで μ_F は測度 μ を F の上に縮小したものである．

証明 もし F が補間集合なら $A|F=C(F)$ となるから前の定理より $\|\nu\| \leqq c\|\nu-A^{\perp}\|(\nu \in \mathfrak{M}(F))$．$A^{\perp} \in \mu$，$\nu=\mu_F$ に対しては $\|\mu_F\| \leqq c\|\mu_F-\mu\| = c\|\mu_{X-F}\|$ となり (**) は満たされる．つぎに (**) が成立したとき F が A の補間集合なることを証明する．(**) から $\mu \in (A|F)^{\perp}$ ならば $\|\mu\|=\|\mu_F\| \leqq c\|\mu_{X-F}\|=0$. ゆえに $A|F$ は $C(F)$ で稠密となる．ゆえに $A|F$ は $C(F)$ で閉なることを証明すればよいこととなり，その結果，前の定理の条件 (*) を満たすことをいえばよい．ここでは $(A|F)^{\perp}=0$ となるから結局つぎのことを証明すればよい．

$$\|\nu\| \leqq c\|\nu-A^{\perp}\| \qquad (\nu \in \mathfrak{M}(F))$$

さて任意の $\nu \in \mathfrak{M}(F)$ と $\mu \in A^{\perp}$ に対して

$$\|\nu-\mu\|=\|(\nu-\mu)_F\|+\|(\nu-\mu)_{X-F}\|=\|\nu-\mu_F\|+\|\mu_{X-F}\|$$
$$\geqq \frac{1}{c}\|\nu-\mu_F\|+\|\mu_{X-F}\|$$

そしてそれゆえに

$$\|\nu-\mu\| \geqq \frac{1}{c}\|\nu\|-\frac{1}{c}\|\mu_F\|+\|\mu_{X-F}\|$$
$$\geqq \frac{1}{c}\|\nu\|-\frac{1}{c}\cdot c\|\mu_{X-F}\|+\|\mu_{X-F}\|=\frac{1}{c}\|\nu\|$$

これは定理が証明されたことを示す． *qed*

つぎに A が Dirichlet 環であるとき補間集合はつぎのようになる．

定理 4·29 （i） A を X の上の Dirichlet 環とし，F を X の中の閉集合とする．そのとき F は A の補間集合となる必十条件は $\mu \perp A$ ならば $\mu_F=0$ となることである．

（ii） A を X の上の Dirichlet 環とし，F を X の中の閉集合とする．そのとき $A|F$ が $C(F)$ で閉であるということと $\mu \perp A$ なら $\mu_F \perp A$ となることとは同等である．その結果 $A|F$ が $C(F)$ の中で閉であれば $A|F$ と A/kF とは等長同型である．

証明 （i） $\mu \perp A$ なら $\mu_F=0$ となれば定理 4·28 の条件が満たされるか

らFはAの補間集合となる．逆にFをAの補間集合とすれば定理 4·28 の条件(**) が満たされる．いま $\mu\perp A$ とし $\|\mu\|=1$ とおく．そのとき $X-F$ の中にコンパクト集合Kが存在して $\|\mu_{X-(F\cup K)}\|<\varepsilon$. ここで $g\in C^R(X)$ を $\varepsilon\leqq g\leqq 1-\varepsilon$ で $g(K)=\varepsilon$, $g(F)=1-\varepsilon$ となるような関数とすれば，Aは Dirichlet 環なるゆえ $\log g$ は $\mathrm{Re}f(f\in A)$ で一様に近似できる．すなわち $\|e^{\mathrm{Re}f}-g\|<\varepsilon$. その結果 $e^{\mathrm{Re}f}\leqq 1$ でFの上では $e^{\mathrm{Re}f}\geqq 1-2\varepsilon$, Kの上では $\leqq 2\varepsilon$ である．さて $h=e^f$ とおけば $h\in A$ で $|h|=e^{\mathrm{Re}f}$ であり，$h\mu\perp A$ なることと定理 4·28 の条件 (**) から

$$
\begin{aligned}
(1-2\varepsilon)\|\mu_F\|&\leqq\|(h\mu)_F\|\leqq c\|(h\mu)_{X-F}\|\\
&=c\|h\mu_{X-(F\cup K)}\|+c\|h\mu_K\|\\
&\leqq c\|\mu_{X-(F\cup K)}\|+c\cdot 2\varepsilon\|\mu_K\|\\
&\leqq c\varepsilon+2c\varepsilon=3c\varepsilon
\end{aligned}
$$

ε は任意なるゆえ $\mu_F=0$ となる．

（ii） まず $\mu\perp A$ ならばつねに $\mu_F\perp A$ であると仮定する．そのとき $(A|F)^\perp=(A^\perp)_F(=\{\mu_F : \mu\in A^\perp\})$ であるから任意の $\nu\in\mathfrak{M}(F)$ に対して

$$\|\nu-(A|F)^\perp\|=\|\nu-(A^\perp)_F\|=\|(\nu-A^\perp)_F\|\leqq\|\nu-A^\perp\|$$

それゆえ $A|F$ と A/kF は等長同型で $A|F$ は $C(F)$ の中で閉となる．逆に $A|F$ は $C(F)$ で閉ならば定理 4·27 からある $c\geqq 1$ で

$$\|\nu-(A|F)^\perp\|\leqq c\|\nu-A^\perp\| \qquad (\nu\in\mathfrak{M}(F))$$

それゆえ $\mu\in A^\perp$ に対して

$$\|\mu_F-(A|F)^\perp\|\leqq c\|\mu_F-A^\perp\|\leqq c\|\mu_F-\mu\|=c\|\mu_{X-F}\|$$

さて $\mu\in A^\perp$, $\|\mu\|\leqq 1$ を固定しよう．そのとき（i）の証明の中にあるように $X-F\supset K$ となるコンパクト集合 K と $f\in A$ を選び，$h=e^f(\in A)$ を作れば $\|h\|\leqq 1$, $|h|$ はFでは $1-2\varepsilon$ より大きく，Kでは 2ε より小さい．そして上の式の μ の代わりに $h\mu$ を入れれば

$$
\begin{aligned}
\|h\mu_F-(A|F)^\perp\|&\leqq c\|h\mu_{X-F}\|\leqq c\|h\|\,\|\mu_{X-(F\cup K)}\|\\
&\quad+c\cdot 2\varepsilon\|\mu_K\|\leqq c\varepsilon+2c\varepsilon=3c\varepsilon
\end{aligned}
$$

ところが $h^{-1}=e^{-f}\in A$ なるゆえAの任意の元fに対して

$$(A|F)^\perp=hh^{-1}(A|F)^\perp\subset h\cdot(A|F)^\perp\subset(A|F)^\perp$$

なんとなれば $g\in A$ ならば $g\cdot(A|F)^\perp\subset(A|F)^\perp$ となるからである．かくし

て $\nu\in(A|F)^{\perp}$ ならば $\nu=h\nu'(\nu'\in(A|F)^{\perp})$ のように書けることになり

$$\|h\mu_F-\nu\|=\|h(\mu_F-\nu')\|\geqq(1-2\varepsilon)\|\mu_F-\nu'\|$$
$$\geqq(1-2\varepsilon)\|\mu_F-(A|F)^{\perp}\|$$

この結果前の式より

$$3c\varepsilon\geqq\|h\mu_F-(A|F)^{\perp}\|\geqq(1-2\varepsilon)\|\mu_F-(A|F)^{\perp}\|$$

が出てくるから，ε は任意なることから $\mu_F\in(A|F)^{\perp}$. *qed*

AがXの上の Dirichlet 環としたとき，Xの閉集合Fに対して $A|F$ が$C(F)$で閉である必十条件としてもっと直観的にわかりやすい条件はつぎのようである．

定理 4·30 AをXの上の Dirichlet 環としFをXの閉部分集合とする．そのとき $A|F$ が $C(F)$ で閉である必十条件はFが尖集合のある族の共通集合となることである．もしFが G_δ 集合ならば，Fが尖集合の共通集合という代わりに単に尖集合とおくことができる．

証明 Fが尖集合のある族の共通集合なら $A|F$ は $C(F)$ で閉となることは定理 4·18 (iii) で証明した．ゆえにその逆を証明すればよい．いまAをXの上の Dirichlet 環とし，Fは $A|F$ が $C(F)$ で閉となるXの中の閉集合とする．Bを，Aにふくまれる関数でFの上で定数となるものの全体とする．Yを，集合Fと$X-F$の各点を一点として見たXの剰余空間 (Quotient space) とする．すなわち集合FはYでは一つの点であり，それををpとおけば，Yでのpの近傍はXでのFの近傍Uで $\{p\}\cup\{x: x\in U-F\}$．一方Yのpと異なる点の近傍はXでの，その点の近傍と同じである．さてBの元fに対して $\dot{f}(p)=f(x)(x\in F)$, $\dot{f}(x)=f(x)$ $(x\notin F)$ とおけば $\dot{f}$ はYの上の連続関数となる．いま $\mathfrak{B}=\{\dot{f}: f\in B\}$ とおけば $\mathfrak{B}$ はB に同型な $C(Y)$ の部分環となるわけであるが，それがまたYの上の Dirichlet 環であることが証明される．この証明は後にまわし定理の証明を急ごう．いま始めにXが距離空間だと仮定する．いま述べたように剰余空間Yと，その上の Dirichlet 環$\mathfrak{B}$を作る．ここでYはコンパクト距離空間となることは明らか．$p\in Y$ をXでFに対応する点とすれば，p が$\mathfrak{B}$の尖点になっていることを証明したいのであるが，それには定理 4·4 と系 4·5 によりpの任意の近傍Vと $\varepsilon>0$ に対して$\mathfrak{B}$の中に関数 f が存在して

$$\|f\|\leqq 1,\quad |f(p)|>1-\varepsilon \text{ かつ } |f(x)|\leqq\varepsilon(x\in X-V)$$

なることが示されればよい．これは$\mathfrak{B}$が Dirichlet 環なるゆえ容易に証明され

る．すなわちまず $C^R(Y)$ の中に $||g||=1-\varepsilon/2$, $g(p)=1-\varepsilon/2$, $g(Y-V)<\varepsilon/2$ となる正関数をとる．$\log g$ は $\mathrm{Re}\,h(h\in\mathfrak{B})$ で一様に近似されるから $||g-e^{\mathrm{Re}\,h}||<\varepsilon/2$ となる $h\in\mathfrak{B}$ が存在する．そのとき $f=e^h\in\mathfrak{B}$ は求める関数である．このようにして p は尖点となったわけだが，これを B にもどして考えれば，F は A に関して尖集合となっていることがわかる．つぎに X が距離空間でない場合を考える．前のとおり空間 Y と関数環 $\mathfrak{B}$ を作る．そして前と同じように p の任意の近傍 V に対して $f\in\mathfrak{B}$ を

$$||f||\leqq 1,\ |f(p)|>1-\varepsilon \quad \text{かつ} \quad |f(x)|\leqq\varepsilon(x\in X-V)$$

のように作る．始めに与えた近傍を $V_1(=V)$ とし，それに対応する関数を $f_1(=f)\in\mathfrak{B}$ とする．つぎに $V_2=\{y\in Y,\ |f_1(y)-f_1(p)|<\varepsilon\}$ とおき，それに対する $f\in\mathfrak{B}$ を f_2 とする．以下同様に $V_3,\cdots,\ V_{n-1},\ f_3,\cdots,f_{n-1}$ を選び

$$V_n=\{y\in Y,\ |f_i(y)-f_i(p)|<\frac{\varepsilon}{n},\ i\leqq n-1\}$$

となる $V=V_n$ に対してそれに対応する f を $f_n\in\mathfrak{B}$ とする（十分大きな n では $V=V_1\supset V_n$）．さて Y の点を類にわける．Y の任意の二つの元 y_1, y_2 が同値となる（$y_1\sim y_2$）というのをすべての n で $f_n(y_1)=f_n(y_2)$ ということと定義する．このような類別による類の族を Z とする．Z の元 z に対して，$z\ni y$ なら $\tilde{f}_n(z)=f_n(y)$ とおく．Z にはすべての $\tilde{f}_n$ が連続となるような最も弱い位相を入れる．そのとき Z はコンパクトな距離空間となり，$\{f_1,f_2,\cdots\}$ で生成された $\mathfrak{B}$ の閉部分環 $\mathfrak{B}_1$ と $\{\tilde{f}_1,\tilde{f}_2,\cdots\}$ で生成された $C(z)$ の部分環とは対応 $f\longleftrightarrow\tilde{f}$ で同型となる．さらに

$$\tilde{V}_n=\{z\in Z:\ |\tilde{f}_i(z)-\tilde{f}_i(\tilde{p})|<\varepsilon/n,\ i\leqq n-1\}$$

は $\tilde{p}$ の近傍の基底をなし，$\tilde{p}$ の任意の近傍 $\tilde{V}$ に対してある $\tilde{f}$（ある $\tilde{f}_n$）が存在して

$$||\tilde{f}||\leqq 1,\ ||\tilde{f}(\tilde{p})||>1-\varepsilon \quad \text{かつ} \quad |\tilde{f}(z)|\leqq\varepsilon(z\in Z-\tilde{V}).$$

ここで $\tilde{p}$ は p をふくむ Z の類を表わす．かくして定理4·4と系4·5より $\tilde{p}$ は $\tilde{\mathfrak{B}}$ の尖点となり $\tilde{f}\in\tilde{\mathfrak{B}}$ で $\tilde{p}=\{z:\tilde{f}(z)=1\}$, $||\tilde{f}||=1$ とすれば $\tilde{f}$ に対応する $f\in\mathfrak{B}_1$ では $F\subset\{x:f(x)=1\}\subset\bigcap_{n=2}^{\infty}V_n$. 十分大きな n では $V_n\subset V_1=V$ なるゆえ F と V の間に A の尖集合が存在することになる．V は p の任意の近傍なるゆえ定理の証明は完了した．

ここで上の定理で残した部分を証明する．すなわちAをXの上の Dirichlet 環でFをXの閉集合とし，$A|F$ は $C(F)$ で閉とする．BをAの関数でFの上で定数になるものの全体とする．Yを集合Fと $X-F$ の各点を一点として得られた剰余空間とする．Bの元fに対して $\dot{f}(y)=f(x)(x\in y)$ とおき $\mathfrak{B}=\{\dot{f};f\in B\}$ とすれば$\mathfrak{B}$はYの上の Dirichlet 環となることである．さてFに対応するYの点をpとおく．そしてρをXからYへの自然の写像 (natural mapping) とする．そのとき $\tilde{\rho}:f\to f\circ\rho$ は $C(Y)$ から $C(X)$ への等長同型写像となる．その随伴作用素 $\tilde{\rho}^*$ は Hahn–Banach の定理より $\mathfrak{M}(X)$ から $\mathfrak{M}(Y)$ の上への線型作用素となる．明らかに $\tilde{\rho}\mathfrak{B}=B$ であり $k\{p\}=\{f\in\mathfrak{B}:f(p)=0\}$ とおけば $\tilde{\rho}k\{p\}=kF$ となる．さて $\tilde{\rho}^*$ は $\mathfrak{M}(X)$ から $\mathfrak{M}(Y)$ の上への写像なるゆえ $(kF)^{\perp}$ を $(k\{p\})^{\perp}$ の上へ写す．なんとなればνを $(k\{p\})^{\perp}$ の任意の元として $\tilde{\rho}^{*-1}\nu\ni\mu$ なら $\nu=\tilde{\rho}^*\mu$. $(k\{p\})^{\perp}\ni\tilde{\rho}^*\mu$. ところで任意の $f\in kF$ では，ある $k\{p\}\ni g$ で $\tilde{\rho}g=f$ となるから，$0=(\tilde{\rho}^*\mu)g=\mu(\tilde{\rho}g)=\mu(f)$. ゆえに $\mu\in(kF)^{\perp}$ で $\nu=\tilde{\rho}^*\mu$ となるからである．さて$\mathfrak{B}$をYの上の Dirichlet 環であることを示すために，任意の $f(p)=0$ となる $f\in C^R(Y)$ が $\mathrm{Re}\,g\,(g\in k\{p\})$ で一様に近似できることを証明すればよい．もし一様に近似できないとすれば，$\mathfrak{M}(Y)$ の中に実測度 λ が存在して $\lambda\{p\}=0$, $\lambda(f)=1$, $\lambda(\mathrm{Re}\,g)=0$ $(g\in k\{p\})$. それゆえまた $\lambda(k\{p\})=0$ となる．すでに証明したことからXの上の実測度μが存在して $\tilde{\rho}^*\mu=\lambda$ かつ $\mu_F=0$ となる．$\tilde{\rho}^{*-1}(k\{p\})^{\perp}=(kF)^{\perp}$, $\mu\in(kF)^{\perp}$ なるゆえ $\mu\in((kF)^{\perp})_{X-F}=(A^{\perp})_{X-F}\subset A^{\perp}$ (つぎの定理 4・31 と定理 4・29 (ii)). 結局μはAと直交する実測度なるゆえAが Dirichlet 環なることより $\mu=0$ でなければならぬ．ゆえに $\lambda=\tilde{\rho}^*=0$. これは不合理． *qed*

定理 4・31 AをXの上の関数環とし，FをXの閉集合とする．もし $A|F$ が $C(F)$ で閉であれば $(kF)^{\perp}=A^{\perp}+\mathfrak{M}(F)$ となる．

証明 $A^{\perp}+\mathfrak{M}(F)\subset(kF)^{\perp}$ は明らか．一方 $f\in C(X)$ が $A^{\perp}+\mathfrak{M}(F)$ と直交しておれば，もちろん $A^{\perp}$ と直交するから当然 $f\in A$ であり，またfは $\mathfrak{M}(F)$ と直交するから $f(F)=0$ となる．すなわち $f\in kF$ となりその結果 $A^{\perp}+\mathfrak{M}(F)$ は $(kF)^{\perp}$ の中で $\mathfrak{M}(X)$ での*-弱位相で稠密となっている．それゆえ $A^{\perp}+\mathfrak{M}(F)$ は*-弱位相で閉集合となることが証明されればよい．しかしよく知られている定理 (1・1 節A，f) より $W=\{\mu:\|\mu\|\leqq 1,\ \mu\in A^{\perp}+\mathfrak{M}(F)\}$

が *-弱閉集合なることを証明すれば足りる．それを証明する．いま $\{\mu_\delta+\nu_\delta\}$ を W の元の列 (net) とする．ここで $\mu_\delta\in A^\perp, \nu_\delta\in\mathfrak{M}(F)$ で $\mu_\delta+\nu_\delta$ は $\mathfrak{M}(X)$ の *-弱位相で μ に収束すると仮定する．$\mu\in W$ が証明できればよいわけである．$A|F$ が $C(F)$ で閉であることから定理 4·27 により $c\geqq 1$ が存在して

$$||\nu-(A|F)^\perp||\leqq c||\nu-A^\perp|| \quad (\nu\in\mathfrak{M}(F)).$$

それゆえ $||\nu_\delta-\lambda_\delta||\leqq 2c||\nu_\delta+\mu_\delta||\leqq 2c$ を満たすような $\lambda_\delta(\in(A|F)^\perp)$ が存在する．その結果 $\{\nu_\delta-\lambda_\delta\}$ は $\mathfrak{M}(F)$ の中に *-弱集積点 ν をもつ．なんとなれば ν_δ, $\lambda_\delta\in\mathfrak{M}(F)$ かつ $\mathfrak{M}(F)$ は $\mathfrak{M}(X)$ の中で *-弱閉集合であるからである．それゆえ $\{\mu_\delta+\lambda_\delta\}=\{(\mu_\delta+\nu_\delta)-(\nu_\delta-\lambda_\delta)\}$ は $\mu-\nu$ を一つの *-弱集積点としてもつ．$\mu_\delta, \lambda_\delta\in A^\perp$ なるゆえ，そして $A^\perp$ は *-弱閉集合なるゆえ $\mu-\nu\in A^\perp$ となる．ゆえに $\mu\in A^\perp+\mathfrak{M}(F)$. $||\mu||\leqq 1$ は明らかなるゆえ証明は完了した． *qed*

C. 関数のノルム不変な拡張

X の上の関数環 A の補間集合を F とすれば，F の上で定義された任意の連続関数 f は X に拡張できて，それは A の中の関数にとることができるわけだが，その拡張された A の関数 g のノルム $\sup\{|g(x)|:x\in X\}$ は f のノルムと比較してどの程度の大きさに取れるのであろうか．これに関して Rudin[文献 56)] はディスク環の場合につぎのような結果を出した：F を単位円 Γ の Lebesgue 0 の閉集合（ディスク環の補間集合）の上で定義された任意の連続関数 f に対して，単位閉円板 D の上で連続でかつその内点（単位開円板）で解析的である関数 g が存在して F では $g=f$ であり，かつそのノルムも等しくとることができる．すなわち $\sup\{|g(x)|:x\in D\}=\sup\{|f(x)|:x\in F\}$．これが一般の関数環に対していえないだろうか．Dirichlet 環に対しては同じことがいえることを後で示すが，まずつぎのことがいえる．

定理 4·32 A を X の上の任意の関数環とする．F を X の閉集合とするとき $A|F$ が $C(F)$ で閉であるための必十条件は，A の任意の元 f に対して A の元 g が存在し F の上では $g=f$ であり，かつ $||g||_X=\sup\{|g(x)|:x\in X\}\leqq\gamma||f||_F$ となることである．ここで $||f||_F=\sup\{|f(x)|:x\in F\}$ であり，γ は f に無関係な定数である．

証明 $A|F$ が $C(F)$ で閉となれば定理 4·27 により $A|F$ と A/kF は同相同型となるから，ある α で $||f+kF||\leqq\alpha||f|F||$ となり，$\gamma=2\alpha$ とおけばよい．

逆に任意の $f\in A$ に対して $g\in A$ が F の上で $g=f$ で，かつ $||g||_X\leqq\gamma||f||_F$ となるように存在したとすれば，$||f+kF||\leqq\gamma||f|F||$ となり $A|F$ と A/kF が同相同型となり $A|F$ は $C(F)$ で閉． qed

さて $A|F$ が $C(F)$ で閉となるとき，A が Dirichlet 環であればこの問題はどうなるであろうか．実は上の定理の γ を1にすることができるのである．すなわち，

定理 4・33 A を X の上の Dirichlet 環とする．F を X の閉集合とし $A|F$ は $C(F)$ で閉であるとする．そのとき任意の $f\in A$ に対して $g\in A$ が存在し，F の上では $g=f$ となりかつ $||g||_X=||f||_F$ となる．またもし F が G_δ 集合（とくに X が距離空間）ならば，そのとき g を $|g(x)|<||f||_F(x\notin F)$ のようにとることができる．

証明 定理 4・30 により Dirichlet 環 A で $A|F$ が $C(F)$ で閉なれば F は A の尖集合のある族の共通集合となってしまう．それゆえ X の上の任意の関数環 A で，A の尖集合のある族の共通集合であるような F に対して，定理で主張しているようなことが証明されればよいわけである．以下その証明：$||f||_F=1$ と仮定してよい．定理 4・29 (ii) により A/kF と $A|F$ は等長同型であるから $f|F$ は $h\in A$, $||h||<3/2$ なる拡張をもつ．そのとき $\{x\in X: |h(x)|\leqq1\}$ は F をふくむ G_δ 集合であるからそれを $\bigcap_{n=1}^{\infty}V_n$（$V_n$ は開集合）とかくことにする．$F\subset V_n$ となりかつ F は尖集合の族の共通集合であるから，おのおのの V_n は F をふくむ A の尖集合 F_n をふくむ．ゆえに $F_0=\cap F_n$ はまた F をふくむ尖集合となり，その上で $|h|\leqq1$ となる．$k\in A$, $||k||=1$ を $F_0=\{x\in X: k(x)=1\}$ かつ $F_0\not\ni x$ で $|k(x)|<1$ のようにとる．そして

$$K_n=\{x: 3+2^{-n-1}\leqq|h(x)|\leqq1+2^{-n}\}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

とおく．$K_n\cap F_0=\phi$ となるゆえ K_n の上では適当な正整数 p_n で $|k^{p_n}|<1/2^{2n}$ とすることができる．つぎに

$$g=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}k^{p_n}h$$

とおけばもちろん $g\in A$ であるが，この g が求める関数である．$g|F=h|F=f|F$ は明らかであるが，$||k||=1$ なるゆえ $|h(x)|\leqq1$ なら $|g(x)|\leqq1$ である．一方 $|h(x)|>1$ なるときは $||h||<3/2$ であるからある $m\geqq1$ で $x\in K_m$. ゆえに

$$|g(x)| \leqq |h(x)| \cdot \left(\sum_{n \neq m} 2^{-n} + 2^{-m} \cdot 2^{-2m}\right)$$
$$\leqq (1+2^{-m})(1-2^{-m}+2^{-3m})$$
$$=(1-2^{-2m})+(1+2^{-m}) \cdot 2^{-3m}$$
$$=1-2^{-2m}+2^{-3m}+2^{-4m}=1-2^{-4m}(2^{2m}-2^{m}-1)$$
$$<1.$$

かくして $\|g\|_X \leqq 1=\|f\|_F$ となる．F が G_δ 集合なるときは定理 4·30 より F は尖集合となることより，この場合も定理は容易に証明できる． *qed*/

ここで前に述べた Rudin の定理の拡張ができる．

定理 4·34 A を X の上の Dirichlet 環とする．そして X の閉集合 F は A の補間集合であれば，F の上の任意の連続関数 f は A の関数 g に拡張され，この場合ノルムを変えないようにできる．

証明 F の上の任意の連続関数 f に対して F が補間集合なるゆえ $h \in A$ が存在して，F の上では $h=f$. 前の定理よりこの h に対して，$g \in A$ を F の上では $g=h$，かつ $\|g\|_X=\|h\|_F$ のようにとることができる．その結果 F の上では $g=f$ で $\|g\|_X=\|f\|_F$. *qed*/

D. Šilov 境界との関係

A を X の上の関数環とし，A の Šilov 境界を ∂_A とする．F を ∂_A をふくむ任意の X の閉集合とすれば，$A|F$ は $C(F)$ で閉となることは明らか．しかしこの逆は成立するだろうか：ある X の閉集合 F_0 をふくむ任意の閉集合 F で，$A|F$ が $C(F)$ で閉となれば $F_0 \supset \partial_A$ となるだろうか．つぎはその答である．

定理 4·35 A を X の上の本質環とする．F_0 を X の閉集合とし，F_0 をふくむ任意の閉集合 F で，$A|F$ が $C(F)$ で閉となるとする．そのとき F_0 は A の Šilov 境界をふくむ．

証明 $F_1=\{y \in X,\ \forall f \in A$ で $|f(y)| \leqq \sup\{|f(x)| : x \in F_0\}\}$ とおく．そのとき F_1 は F_0 をふくむ閉集合なることは明らかであるが，もし $F_1=X$ となれば

$$\sup_{x \in F_0} |f(x)| = \sup_{x \in F_1} |f(x)| = \sup_{x \in X} |f(x)| \qquad (f \in A)$$

となり Šilov 境界の定義より $F_0 \supset \partial_A$ となる．それゆえこの定理を証明するためには $F_1=X$ を証明すればよい．そうでないと仮定して矛盾を出す．$X \neq F_1$ とするとき，$Q \supset F_1$，$P \cap Q=\phi$ となる任意の閉集合 P, Q に対して $f \in A$ が

存在して $f(P)=1$, $f(Q)=0$ となることが示される．なんとなれば F_1 にふくまれない異なる二点 p, q を考える．$p\notin F_1$ から $g\in A$ が存在して $1=g(p)>\sup\{|g(x)|:x\in F_1\}$ となる．ところで仮定より $A|(F_1\cup p)$ は $C(F_1\cup p)$ で閉であるから，$g_1(p)=1$, $g_1(F_1)=0$ となる $g_1\in A$ が存在することになる．ゆえにある $g_2\in A$ で $g_2(p)=1$, $g_2(F_1\cup q)=0$ となるわけである．いま $Q-F_1\ni x$, $P\ni y$ に対しての g_2 を f とすれば，$f(y)=1$, $f(F_1\cup x)=0$ となる．それで $F_1\cup(x)$ の閉近傍 V_x と y の閉近傍 W_x を適当にきめれば

$$|f(V_x)|\leqq\frac{1}{4},\quad |1-f(W_x)|\leqq\frac{1}{4}$$

となる．複素平面上で集合 $M=\{z:|z|\leqq 1/4\}\cup\{z:|1-z|\leqq 1/4\}$ を考え $\{z:|z|\leqq 1/4\}$ の上で恒等的に 1, $\{z:|1-z|\leqq 1/4\}$ の上で恒等的に 0 となるような関数 ψ を考えれば，M の上で ψ は z の多項式 $\{p_n(z)\}$ によって一様に近似できる（定理 4·13）．その結果 $p_n\circ f\in A$ なることから $\{(p_n\circ f)|(V_x\cup W_x)\}$ は $A|(V_x\cup W_x)$ の関数の列であり V_x の上では 1 に W_x の上では 0 に一様に収束する．$A(V_x\cup W_x)$ は仮定より $C(V_x\cup W_x)$ で閉であるから，つぎのような $e\in A$ が存在する．

$$e(V_x)=1,\quad e(W_x)=0$$

y を P の固定した元とする．Q はコンパクトであるゆえ有限個の $V_x(x\in Q)$ で被覆される．それを $V_{x_1}, V_{x_2}, \cdots, V_{x_n}$ とする．$e_1, e_2, \cdots, e_n$ をそれに対応した A の元とすれば，$e_1'=e_1+e_2-e_1e_2$ は $V_{x_1}\cup V_{x_2}$ で 1 で y の近傍 $W_{x_1}\cap W_{x_2}$ で 0 をとる A の元となる．同様にして $e_2'=e_1'+e_3-e_1'e_3$ は $V_{x_1}\cup V_{x_2}\cup V_{x_3}$ で 1 で $W_{x_1}\cap W_{x_2}\cap W_{x_3}$ で 0 となる A の関数となる．これを続けておこなうことにより結局 Q の上で 1 をとり，y のある近傍 U_y で 0 となる A の関数 f_y が得られたことになる．今度はその U_y の有限個で P を被覆すれば，それに対応する有限個の f_y の積を f とすれば $f\in A$ で $f(P)=1$, $f(Q)=0$ を満たすことになる．

さて Katznelson［文献 57)］は環 A の X の部分集合での有界性という概念を導入した．A が X の部分集合 V で有界であるといわれるのは，定数 C_V が存在して F を V の中の任意の閉部分集合としたとき A/kF の中の任意のベキ等元のノルムは $<C_V$ となることをいう．有界性に関してつぎの三つのことをま

ず証明する．

（1）　V_1, V_2 を $X-F_1$ にふくまれる開集合とする．そしてAは V_1, V_2 でそれぞれ有界とする．そのとき A は $V_1 \cup V_2$ の中の任意の閉集合 F において有界である．

（2）　Fを $X-F_1$ にふくまれるXの閉集合とする．そしてAはFの任意の点 x で有界ならば，Fをふくむある開集合Vの上でAは有界である．ここで点 x でAが有界といわれるのはAが x のある近傍で，有界なることである．

（3）　$X-F_1$ の中にはAがそこで有界でない点は高々有限個しかない．

まず（1）の証明から始める．$F-V_2$ は V_1 にふくまれる閉集合であるから $F-V_2 \subset W_1 \subset \overline{W}_1 \subset V_1$ となるような開集合 W_1 が存在する．そしてまた $F-W_1 \subset V_2$ なることから開集合 W_2 が存在して $F-W_1 \subset W_2 \subset \overline{W}_2 \subset V_2$ となる．$F-W_1$ と $F-W_2$ は共通点がなく，かつこの両者は F_1 と共通点をもたないゆえ，ある $\phi \in A$ で

$$\phi(F-W_1)=0,\ \ \phi(F-W_2)=1$$

このことがらは前に証明した．P を F の任意の閉集合とし $f+kP$ を剰余環 A/kP の巾等元とする．そのとき f はPのおのおのの点で1であるか，0である．そのとき $f+k(P\cap \overline{W}_i)$ は $A/k(P\cap\overline{W}_i)$ でベキ等元であり，剰余環の定義より $f_i \in f+k(P\cap\overline{W}_i)$ が存在して $||f_i||<C_{V_i}(i=1,2)$ となる．これは $P\cap\overline{W}_i$ は V_i の中の閉集合なることと V_i の有界性による．しかし $P\subset F\subset W_1\cup W_2$ なることからPの上では $f=\phi f_1+(1-\phi)f_2$ となることは明らか．そして

$$||f+kP|| \leqq ||\phi f_1+(1-\phi)f_2|| < ||\phi||\cdot C_{V_1}+||1-\phi||\cdot C_{V_2}.$$

この右辺の値を C_F とおけば（1）は証明された．（2）の証明は（1）から容易に証明されるから，つぎに（3）を証明する．もしAがそこで有界でないような点が $X-F_1$ の中に無限個あると仮定し，それを $\{x_n\}$ とする．定義から x_n の部分列 $\{x_{i_n}\}$ を適当にとり，x_{i_n} の適当な近傍 V_n の上でAが有界でなく，$V_n\cap F_1=\phi(n=1, 2, 3, \cdots)$ でかつ $\{V_n\}$ は互いに共通点がないようにできる．V_n は有界でないことから V_n は閉集合 E_n をふくみ，A/kE_n のベキ等元 f_n+kE_n のノルムは n より大きくすることができる．さて $E=\overline{\cup E_n}\cup F_1$ とおけば，$V_n\cap E_m=\phi\,(n\neq m)$ なることから $E=E_n\cup(\overline{\bigcup_{m\neq n} E_m})\cup F_1$，かつ $E_n\cap\{(\overline{\bigcup_{m\neq n} E_m})\cup F_1\}=\phi$ であるから $\phi\in A$ が存在して

$$\phi(E_n)=1,\ \ \phi(E-E_n)=0$$

となる．このような ϕ の存在はすでに証明した．その結果 ϕf_n はEの上で0または1をとる．それゆえ ϕf_n+kE は A/kE のベキ等元である．しかしつぎのことが $kE\subset kE_n$ なることから成り立つ．

$$n\leqq||f_n+kE_n||=||\phi f_n+kE_n||\leqq||\phi f_n+kE||$$

それゆえ A/kE のベキ等元のノルムは有界でなくなる．しかし $A|E$ は $C(E)$ で閉（$E\supset F_1$ なるゆえ定理の仮定より）であるから定理 4·32 よりある $\gamma>0$ で $||\phi f_n+kE||\leqq\gamma||\phi f_n|E||\leqq\gamma<+\infty$ となり上の式と矛盾する．これで準備が終わったので定理の証明にかかる．

さてMをAがそこで有界でないような $X-F_1$ の点の集りとする．(3) よりMは有限集合である．$N=F_1\cup M$ とおくとき，もし $N=X$ なら $M=X-F_1$ は開集合でかつ有限集合なるゆえMのおのおのの点は孤立点となる．ここで孤立点ではAは有界なることは明らかなるゆえ $N\neq X$ となる．Aは本質環なるゆえ $f_0(N)=0$ でかつ $f_0\notin A$ となる関数 f_0 が存在する．μを $\mu(f_0)=1$, $\mu(A)=0$ となる複素値測度とする．そのとき $P\cap N=\phi$ となる任意のXの閉集合Pで，$\mu(P)=0$ となることを示す．もしこれが示されたとすれば

$$\int_{X-N}f_0(x)d\mu=0 \quad かつ \quad f_0(N)=0$$

なるゆえ $\int_X f_0(x)d\mu=0$ となり $\mu(f_0)=1$ に反する．この矛盾は $F_0\supset\partial_A$ なることを示す．ゆえに結局 $P\cap N=\phi$ となる任意のXの閉集合Pに対して $\mu(P)=0$ なることが証明されればよい．さて U_0 を開集合とし $X-P\supset\bar{U}_0\supset U_0\supset N$ のようにとる．任意の $\varepsilon>0$ に対してPをふくむ開集合Vが存在して $|\mu|(V|P)<\varepsilon$, $V\cap U_0=\phi$ となる．ここで $|\mu|$ はμの全変分を表わす．さて $H=X-U_0$ とおけばHの任意の点においてAは有界なるゆえ (2) よりAはHのある近傍で有界である．ゆえに定数 C_H が存在してHの任意の閉部分集合Kで剰余環 $A|kK$ のすべてのベキ等元のノルムは $<C_H$ となる．$X-V\supset N$ なるゆえ $f\in A$ が存在して $f(P)=1$, $f(X-V)=0$ となる．もし $K=P\cup(H-V)$ とおけば明らかに $f+kK$ は A/kK のベキ等元となる．それゆえ $h_1\in A$ が存在して $h_1(P)=1, h_1(H-V)=0$ かつ $||h_1||<C_H$ となる．また $\bar{U}_0\supset N$ で $P\cap\bar{U}_0=\phi$ なるゆえ $h_0(P)=1$, $h_0(\bar{U}_0)=0$ となる $h_0\in A$ が存在す

るゆえ，$h=h_0h_1$ とおけば $h(P)=1$，$h(X-V)=0$ で $\|h\|<m$（m は V に無関係，したがって ε に無関係な正の定数）となる．かくして

$$0=\int_X h d\mu=\int_{X-V} h d\mu+\int_{V-P} h d\mu+\int_P h d\mu.$$

そして

$$\left|\int_{V-P} h d\mu\right|\leqq m\cdot|\mu|(V-P)<m\varepsilon,\quad \int_{X-V} h d\mu=0$$

ゆえに $|\mu(P)|=\left|\int_P h d\mu\right|<m\varepsilon$．$\varepsilon$ は任意なるゆえ $\mu(P)=0$ となる．　qed/

注意　この定理で A が本質環であるという仮定は必要である．A_1 を Y の上の関数環とし，Z を Y と共通点のないコンパクト Hausdorff 空間とし X を Y と Z との和とする．すなわち Y，Z は X で開集合とする．そして $A=A_1\oplus C(Z)=\{f\in C(X):f|Y\in A,\ f|Z\in C(Z)\}$ とおけば A は X の上の関数環であるが本質環ではない．ここで $\partial_A\supset Z$ は明らか．いま F_1 を $F_1\subset Z$，$F_1\neq Z$ となる X の閉集合とし $F_0=Y\cup F_1$ とおく．そのとき $F\supset F_0$ となる任意の閉集合 F で $A|F$ は $C(F)$ で閉であるが，$F_0\cap Z=F_1$ なるゆえ $F_0\supset\partial_A$ とはならない．

A が一般の関数環の場合つぎの定理を得る．

系 4·36　A を X の上の任意の関数環とする．F_0 を A の本質集合 E の閉部分集合とする．もし F_0 をふくむ任意の閉集合 F で $A|F$ が $C(F)$ で閉となれば，F_0 は関数環 $A|E$ の Šilov 境界 $\partial_{A|E}$ をふくむ．*)

証明　$A|E$ は本質環であるから前の定理より明らか．　qed/

この系はつぎの Glicksberg の定理［文献 58)］を導く．

系 4·37　A を X の上の関数環とする．もし X の任意の閉集合 F で $A|F$ が $C(F)$ で閉となれば，$A=C(X)$ となる．

証明　もし $A\neq C(X)$ となれば，A の本質集合 E は少くとも異なる二点 p，q をもつ．仮定より $\{p\}$ をふくむ任意の閉集合 F で $A|F$ は $C(F)$ の中で閉であるから前の系で $\{p\}=\partial_{A|E}$．同様にして $\{q\}$ をふくむ任意の閉集合 F でも $A|F$ は $C(F)$ で閉なるゆえ $\{q\}=\partial_{A|E}$．この矛盾は $A=C(X)$ なることを示している．　qed/

注意　4·4 節 B 項の諸定理および定理 4·33，4·34 は Glicksberg［文献 58)］による．また定理 4·35 は Wada［文献 59)］による．

---

*) この系の条件の中で "F_0 を A の本質集合 E の閉部分集合とする" は略くことができる．

4・5　関数環のイデアルの乗関数

一般の Banach 環においての**乗関数** (multiplier) の問題が多くの人によって論じられているが，ここでは関数環のイデアルの乗関数について考えよう．

A をコンパクト Hausdorff 空間 X の上の関数環とし，J を A の中の（0）でない閉イデアルとする．J の乗関数とは $\varphi J \subset J$ となる $X-h(J)$ の上の関数 φ のことをいう．ここで $h(J)$ は J の被 (hull)，すなわち $h(J)=\cap\{Z(f);\ f\in J\}$，$Z(f)=\{x\in X: f(x)=0\}$ である．J の乗関数全体の集合を $\underline{M_l}(J)$ で表わすことにする．また A の極大イデアル空間 M_A を考えたとき Gelfand の表現によって A は M_A の上の関数環と見られるから，その環を $\hat{A}$ で表わしたとき $\hat{A}$ の閉イデアル $\hat{J}=\{\hat{f}: f\in J\}$ の乗関数全体の集合を $M_l(J)$ で表わすことにする（ここで $M_A \ni \varphi$ で $\hat{f}(\varphi)=\varphi(f)$）．ところで J の乗関数は局所コンパクト空間 $X-h(J)$ の上の有界連続関数となる．その証明は Wang によって与えられた（たとえば Wang [文献 60)]．以下その証明．

定理 4・38　閉イデアル J の任意の乗関数 φ は局所コンパクト空間 $X-h(J)$ の上の有界連続関数である．

証明　φ が $X-h(J)$ の上の連続関数なることは乗関数の定義からほとんど明らか．ゆえに有界なることを証明する．Banach 空間 J（ノルムはもちろん一様ノルム）から J への線型作用素 T を

$$Tf=\varphi f \qquad (f\in J)$$

と定義する．まず作用素 T は有界，すなわち連続であることを証明する．それには閉グラフ定理を用い，$f_n\to f$，$Tf_n\to g$ と仮定する．そのとき任意の $h\in J$ で

$$\begin{aligned} gh &= (\lim_{n\to\infty} Tf_n)h = (\lim_{n\to\infty} \varphi f_n)h = \lim_{n\to\infty} \varphi f_n h \\ &= (\lim_{n\to\infty} f_n)\cdot Th = f\cdot Th = h\cdot Tf. \end{aligned}$$

h は J の任意の元なるゆえ $g=Tf$ となり，T の連続性は証明された．これからまた φ が $X-h(J)$ で有界なることが証明される．まず $x\in X-h(J)$ に対してつぎのようにおく．

$$K_x=\sup\{|f(x)|;\ f\in J,\ \|f\|\leqq 1\}$$

そのとき $0<K_x\leqq 1$ となる．そして任意の $f\in J$ で

$$|\varphi(x)f(x)| \leqq K_x\|\varphi f\| = K_x\|Tf\| \leqq K_x\|T\|\,\|f\|$$

とくに $\|f\|=1$ となる $f\in J$ のみを考えると

$$|\varphi(x)| \leqq \inf_{f\in J,\,\|f\|=1} \frac{K_x\|T\|}{|f(x)|} = \frac{K_x\|T\|}{\sup\limits_{f\in J,\,\|f\|=1}|f(x)|} = \|T\|$$

これが任意の $x\in X-h(J)$ で成立するゆえ $\|\varphi\|_\infty \leqq \|T\| < \infty$ である. qed

このようにして $\underline{M_l}(J)$ は（当然 $M_l(J)$ も）有界連続関数からなる環となるわけで，また一様ノルムで Banach 環にもなっているわけである．

つぎに Y を局所コンパクト空間とし，Y の上の有界連続関数全体 $C(Y)$ に強位相（strict topology）β とよばれるものが Buck［文献 61)］によって導入された．それはつぎのようなものである．無限遠点で0となる Y の上の連続関数 g，すなわち任意の $\varepsilon>0$ に対して $\{x\in Y : |g(x)|\geqq\varepsilon\}$ は Y の中のコンパクト集合となるような g の全体の集合を $C_0(Y)$ とおく．$C(Y)$ の中の関数の列（net）f_λ が f_0 に強収束するといわれるのは $C_0(Y)$ の任意の元 g で $\|f_\lambda g-fg\|_\infty\to 0$ のときと定義する．これを $f_\lambda\to f_0(\beta)$ とかくこととする．つぎに F を X の閉集合とし，F が条件（G）を満たすということをつぎのように定義する．すなわち

（G）$\mu\perp A$ となる測度 μ は，また $\mu_F\perp A$ を満たす．この条件（G）は実は F がある尖集合の族の共通集合となることと同等である（Glicksberg［文献 45)］．

F を X の閉集合とし $kF=\{f\in A : f(F)=0\}$ とすれば kF はもちろん A の一つの閉イデアルであるが，Wells［文献 62)］はこの kF について $\underline{M_l}(kF)$ を研究した．それを少しく拡張した形で定理をあげる．

J を A の（0）でない閉イデアルとし，$F_0=h(J)$ とするとき $\underline{M_l}(kF_0,\ J)$ を $\varphi\cdot kF_0\subset J$ となるような $X-F_0$ の上の関数全体を表わすものとすれば，$\underline{M_l}(kF_0, J)$ はやはり $X-F_0$ の上の有界連続関数の一つの環となる．

定理 4·39 F_0 が条件（G）をもつとき $\underline{M_l}(kF_0,\ J)$ は強位相 $C(X-F_0)_\beta$ による J の閉包と一致する．

証明 F_0 は条件（G）をもつから F_0 は尖集合のある族 $\{F_j\}$ の共通集合である．ここで $F_j=\{x\in X : g_j(x)=1\}$ とおく．g_j は A の元で $x\notin F_j$ では $|g_j(x)|<1$ としておく．そのとき正整数 n で

$$h_{j_1,j_2,\cdots,j_m,n}=1-(g_{j_1},\ g_{j_2},\cdots,g_{j_m})^n$$

とおけば，これらの関数はすべて$k(F_0)$の中にふくまれる．ここで$h_{j_1,j_2,\cdots,j_m,n}$は強位相 β で1に収束することを示す．ここで h のサフィクスの順序を$\{j_{p_1},j_{p_2},\cdots,j_{p_s}\}\supset\{j_{q_1},j_{q_2},\cdots,j_{q_t}\}$，かつ $n\geqq n'$ のとき $(j_{p_1},i_{p_2},\cdots,i_{p_s},n)>(j_{q_1},j_{q_2},\cdots,j_{q_t},n')$ と定める．なんとなれば $f\in C_0(Y)$ $(Y=X-F_0)$ のとき$f(F_0)=0$とおけばfはXの上の連続関数とみなしてもよい．任意の $\varepsilon>0$ で$U_0=\{x\in X:|f(x)|<\varepsilon\}$ とおく．$F_0=\bigcap_j F_j\subset U_0$ なるゆえ，ある $j_1,j_2,\cdots,j_m$ で$F_{j_1}\cap F_{j_2}\cap\cdots\cap F_{j_m}\subset U$ となり，それゆえ

$$\sup\{|(g_{j_1},g_{j_2},\cdots,g_{j_m})(x)|;\ x\in X-U_0\}<1$$

それゆえある n_0 で，$n>n_0$ なら

$$||(g_{j_1},g_{j_2},\cdots,g_{j_m})^n f||_\infty<\varepsilon.$$

これは $||(1-h_{j_1,j_2,\cdots,j_m,n})f||_\infty\to 0$ を示す．さて $\varphi\in\underline{M_l}(kF_0,\ J)$ ならばそのとき $\varphi h_{j_1,j_2,\vdots,j_m,n}\in J$ で，$\varphi h_{j_1,\cdots,j_m,n}\to\varphi(\beta)$ なることはφはYの上で有界となることから明らか．それゆえ $\underline{M_l}(kF_0,J)$ は強位相βでのJの閉包にふくまれる．また反対に $\underline{M_l}(kF_0,J)\supset\bar{J}^\beta$($\beta$での$J$の閉包) も明らかなるゆえ定理は証明された． *qed*

注意 ここでつぎのこともいえる．F_0 をXの閉集合とし，$\underline{M_l}(kF_0)=\overline{kF_0}^\beta$ がいえたとする．そのとき F_0 は条件 (G) を満たす．これは容易に証明できるが Wells [文献 62)] を参照されたい．

つぎにAをディスク環とする．Aの(0)でない閉イデアルJで $M_l(J)$ はどのようなものになるか．これについてつぎのような Wells [文献 62)] の定理がある．

定理 4·40 A をディスク環としたとき，A の(0)でない任意の閉イデアル J に対して $M_l(J)$ は $D-F_0$ の上で連続な H^∞ 関数の全体と一致する．ここでDは複素平面上の単位閉円板，F_0 はJの被 $h(J)$ である．またH^∞ 関数は有界で単位開円板で解析的な関数のことをいう．

この定理の証明は，ディスク環Aの任意の閉イデアルJは，$J=f\cdot kF_0$ (fは内部関数) の形となる (5·2 節参照) ことを利用したものが，上の Wells の論文を見られたい．

注意 この定理はもっと一般に拡張できる：ディスク環は本質極大環であることは前

に示した．それで任意の本質極大環について同じことがいえないかという問題がおきる．それについてつぎのことがいえる：Aを本質極大環としJをAの（0）でない閉イデアルとする．もし $F_0=h(J)$ が条件 (G) をもち，$\hat{F}_0=h(\hat{J})$ がAの極大イデアル空間 M_A の中で非稠密（non dense）ならば $M_l(J)=M_l(kF_0)=H^{\infty}_{F_0}$ となる．ここで $H^{\infty}_{F_0}$ の関数fは M_A-F_0 で連続であって，かつAの中に，ある関数列 $\{g_\lambda\}$ が存在して，M_A-F_0 の中の任意のコンパクト集合 F の上で一様に g_λ は f に収束するようなものと定義する．A をディスク環とした場合 $F_0=h(J)$ は Lebesgue 測度0の閉集合となるから（系 5・9 参照）F_0 が条件（G）を満たすことがわかり，$\hat{F}_0$ は最大値原理で当然 M_A で非稠密である．また上のように定義された $H^{\infty}_{F_0}$ はディスク環の場合，$D-F$ の上で連続な H^∞-関数全体と一致する．ゆえにこれは Wells の定理の拡張になっているわけだが紙面の都合で証明はのせない．証明は Wada［文献 63)］を見られたい．

4·6 局所最大値原理

関数環において最大値原理が，Šilov 境界の概念を導くわけであるが，関数環の極大イデアル空間 M_A から Šilov 境界を除いた部分に対して最大値原理が成立する．これを局所最大値原理 (local maximum modulus principle) という．これは Rossi［文献 64)］によって証明されたが，その証明はかなり複雑であり，完全に証明をするには，かなりの紙面をさかねばならない．それでその証明は省略するが，その応用の1つとして Rickart の関数環の極大イデアルに関する定理を証明する．

定理 4·41（局所最大値原理） Aを関数環とし，Uを $M_A-\partial_A$ の中の開集合とする．そのときAの任意の関数を $\bar{U}$ の上で考えるとき，その絶対値は $\dot{U}$（U の位相的境界）の上で最大値をとる．いいかえれば，A_U をAを$\bar{U}$の上に縮小（restriction）したものの閉包とすれば

$$\dot{U}\supset\partial_{A_U}$$

ここで ∂_{A_U} は関数環 A_U の Šilov 境界を表わす．

この定理の証明は定理 3·30 の証明の中で用いた方法と，局所的尖点という概念を用いてなされる．証明は先にあげた Rossi の論文をみられたい．

さてこの局所最大値原理は関数環の理論の中ではいたるところで用いられている．いまその一つの例として Rickart の関数環の極大イデアル空間に関する定理を紹介する．さてA を関数環とし，その極大イデアル空間を M_A としたときAは M_A の上の関数環とみられることは前に何度も注意した．いまA

を M_A の上の関数環として考える．つぎにBをAをふくむ M_A の上の関数環としたとき，一般に B の極大イデアル空間 M_B は M_A をふくむわけである．Rickart [文献 65)] はBがどのような種類の関数環のとき $M_B=M_A$ となるかについて考えた．そしてBが A-解析関数 (A-holomorphic function) で生成されていれば $M_B=M_A$ なることを示した．以下これについて述べてみよう．

いま M_A の上で定義された複素値関数 f が**局所的に A に属する** (belong locally to A) といわれるのは，M_A の任意の点 x に対して適当な近傍 $U(x)$ が存在して，その上ではAのある関数 g と一致するものとする．そのような関数の全体の $C(M_A)$(M_A の上の複素値連続関数全体の環) における閉包を B_0 とおく．B_0 は一般にはAと異なることが Eva Kallin [文献 66)] によって示された．またfが **A-解析関数**であるとは，M_A の任意の点 x に対して適当な近傍 $U(x)$ が存在して，その上でfは A のある関数列で一様近似できることである．A-解析関数全体の $C(M_A)$ における閉包を B_1 とすれば，$A\subset B_0\subset B_1\subset C(M_A)$ となることは明らかであるが，B_0 については Stolzenberg [文献 67)] が $M_{B_0}=M_A$ となることを示した．そして Rickart が B_1 で，さらに一般にAに A-解析関数の任意の族をつけ加えて，それによって生成された関数環Bを作れば $M_B=M_A$ なることを示したわけである．

これを証明するのに Rickart [文献 65)] の証明を多少簡単にしたものをのせることにする．

(I) BをAと A-解析関数の族 $\{f_\lambda\}$ とで生成された関数環とするとき，$M_B=M_A$ なることを証明するために，A にただ一個の A-解析関数 f_λ を加えてそれで生成された関数環 B_λ に対して $M_{B_\lambda}=M_A$ が証明されれば十分であることを示す．

いま $\varphi\in M_B$ とする．φ はトリビアルでないゆえ $\varphi(1)=1$ となる．それゆえφを B_λ の上に縮小したときφはトリビアルでないゆえ，$M_{B_\lambda}=M_A$ という仮定より $\varphi(f)=f(x_\lambda)$ ($f\in B_\lambda$)．ここで $x_\lambda\in M_A$ である．さて任意の B_λ はもちろんAをふくみ，かつAは M_A の二点を分離するから，すべての λ で x_λ は一致し，それは $x_0\in M_A$ となるはずである．ところで任意の $g\in B$ と任意の $\varepsilon>0$ に対して $a_{i_1,\cdots,i_m}\in A$ が存在して

$$||g-\sum a_{i_1,\cdots,i_m}f_{\lambda_1}{}^{i_1}\,f_{\lambda_2}{}^{i_2}\cdots f_{\lambda_m}{}^{i_m}||<\varepsilon/2$$

ここで $f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}, \cdots, f_{m\lambda} \in \{f_\lambda\}$ で $h=\sum a_{i_1,\cdots,i_m} f_{\lambda_1}{}^{i_1} f^{\lambda_2 i_2} \cdots f_{\lambda_m}{}^{i_m}$ の項は有限である. φ のノルムは1なるゆえ

$$|\varphi(g)-h(x_0)|<\varepsilon/2, \quad |g(x_0)-h(x_0)|<\varepsilon/2.$$

ゆえに $|\varphi(g)-g(x_0)|<\varepsilon$. ε 任意なるゆえ $\varphi(g)=g(x_0)$ で $M_B=M_A$ なることが示された.

(II) (I) により B を A と A-解析関数 f とで生成された M_A の上の関数環としたとき $M_B=M_A$ を証明すればよいことになる. いま D を複素平面 K 上の単位閉円板とし積空間 $\Omega=M_A\times D$ を考える. $f(x,z)=\sum_{i=0}^{n} a_i(x)z^i$ は Ω の上の一つの関数と見られる (ここで $a_i\in A$, z は複素数). このような形をした Ω 上の関数全体の $C(\Omega)$ での閉包 $A\times(z)$ は Ω の上の一つの関数環である. ここで $A\times(z)$ の極大イデアル空間は Ω なることを示そう. φ を $A\times(z)$ の上の任意の準同型写像 (K の上への) とする. φ を A の上に縮小すれば, それは M_A の一点となる. すなわち任意の $a\in A$ に対して $\varphi(a)=a(x_0), x_0\in M_A$ となる. また $\alpha_0(x,z)\equiv z$ なる $A\times(z)$ の関数に対しては $|\varphi(\alpha_0)|\leqq||\varphi||\,||\alpha_0||_\Omega \leqq 1$ なるゆえ $\varphi(\alpha_0)=z_0\in D$ となる. $f(x,z)=\sum_{i=0}^{n} a_i(x)z^i$ なるゆえ $f=\sum_{i=0}^{n} a_i\alpha_0{}^i$ とかけるゆえ

$$\varphi(f)=\varphi(\sum_{i=0}^{n} a_i\alpha_0{}^i)=\sum_{i=0}^{n}\varphi(a_i)[\varphi(\alpha_0)]^i=f(x_0,z_0).$$

$A\times(z)$ の任意の関数は上の $f(x, z)$ のような形をした関数で一様近似できるから, $A\times(z)$ の任意の関数 g で $\varphi(g)=g(x_0,z_0)$ ($(x_0, z_0)\in\Omega$) となる. これは $A\times(z)$ の極大イデアル空間が Ω なることを示している.

(III) さて f_0 を任意の A-解析関数とし, A と f_0 とで生成された関数環を B としたとき, その極大イデアル空間 M_B が M_A に一致することをいうわけであるが, いま M_B の元 y に対して $(y|A,\ f_0(y))\in\Omega$ を対応させる. ここで $y|A$ は y を A に縮小したものを示し, それは M_A の元となる. いまここで $||f_0||=1$ と仮定しておく. このように仮定しても一般性を失なわない. さてこの対応は一対一応である. なんとなればもし $M_B\ni y_1, y_2$ に対して $(y_1|A,\ f_0(y_1))=(y_2|A,\ f_0(y_2))$ ならば任意の $g\in A$ に対して

$$g(y_1)=g(y_1|A)=g(y_2|A)=g(y_2)$$

でかつ $f_0(y_1)=f_0(y_2)$ なるゆえBの任意の h に対して $h(y_1)=h(y_2)$ となり，結局 $y_1=y_2$ が出る．それゆえ M_B は Ω の中にふくまれ，M_A は $M_0=\{(x,f_0(x));\ x\in M_A\}\subset\Omega$ と同一視できる．ここで $M_B=M_A$ を証明するのに M_0 が $A\times(z)$-凸集合なることをいえばよい．すなわち

$$\widetilde{M}_0=\left\{(x,z)\in\Omega:\ \forall\sum_{i=0}^{n}a_i(x)z^i\in A\times(z)\ \text{で}\left|\sum_{i=0}^{n}a_i(x)z^i\right|\leqq\left\|\sum_{i=0}^{n}a_i(x)z^i\right\|_{M_0}\right\}$$

とおいたとき $\widetilde{M}_0=M_0$ なることを証明すればよいことをつぎに示そう．

φをBからKへのトリビアルでない準同型写像とすれば

$$\varphi(\sum_{i=0}^{n}a_if_0{}^i)=\sum_{i=0}^{n}a_i(x_0)\ [\varphi(f_0)]^i.$$

ここで $x_0\in M_A$ である．いま $\varphi(f)=z_0$ とおけば

$$\left|\sum_{i=0}^{n}a_i(x_0)z_0{}^i\right|=\left|\varphi\left(\sum_{i=0}^{n}a_if_0{}^i\right)\right|\leqq\left\|\sum_{i=0}^{n}a_if_0{}^i\right\|_{M_A}$$

$$=\sup_{x\in M}\left|\sum_{i=0}^{n}a_i(x)[f_0(x)]^i\right|=\left\|\sum_{i=0}^{n}a_i(x)z^i\right\|_{(x,z)\in M_0}.$$

ゆえに $(x_0,z_0)\in\widetilde{M}_0=M_0$. これは $z_0=f_0(x_0)$ なることを示し，その結果

$$\varphi\left(\sum_{i=0}^{n}a_if_0{}^i\right)=\sum_{i=0}^{n}a_i(x_0)z_0{}^i=\left(\sum_{i=0}^{n}a_if_0{}^i\right)(x_0).$$

これは $M_B=M_A$ ということにほかならない．それゆえ問題は $\widetilde{M}_0=M_0$ を証明することに帰着されたことになる．これを証明するために局所最大値原理が必要となる．

(IV) さて関数環 $A\times(z)$ の極大イデアル空間は $\Omega=M\times D$ なることはすでに示したが，$A_1=A\times(z)$ を $\widetilde{M}_0$ の上に縮小したものの $\widetilde{M}_0$ の上での一様収束での閉包を $(A_1)_{\widetilde{M}_0}$ で表わせば，$(A_1)_{\widetilde{M}_0}$ の極大イデアル空間は $\widetilde{M}_0$ であることはほとんど明らかである．Rickart の定理は結局 M_0 が $A\times(z)$-凸集合であることを示せばよいことになったわけだから，いまそれを否定して矛盾をだす．すなわち $\widetilde{M}_0\neq M_0$ と仮定する．そのとき関数環 $(A_1)_{\widetilde{M}_0}$ の Šilov 境界は M_0 の中にふくまれる．なんとなれば任意の $(x_0,z_0)\in\widetilde{M}_0$ に対しては $|\sum_{i=0}^{n}a_i(x_0)\ z_0{}^i|\leqq||\sum_{i=0}^{n}a_i(x)z^i||_{M_0}$ となり，その結果任意の $h\in(A_1)_{\widetilde{M}_0}$ に対して $|h(x_0,z_0)|\leqq||h||_{M_0}$ となるからである．それゆえ $U=\widetilde{M}_0-M_0$ とおけば，

$(A_1)_{\widetilde{M}_0}$ の Šilov 境界を∂とすれば $\widetilde{M}_0-\partial\supset\widetilde{M}_0-M_0=U$ となり，またUは$\widetilde{M}_0$ の一つの開集合であるから，ここに局所最大値原理（定理 4·41）を用いるわけであるが，それにはこの局所最大値原理の形を少しかえなければならない(Rickart [文献 68)] 参照). すなわち A_1 の中の関数だけでなく f_0 をふくむ関数に対しても適用されるようにする. それは f_0 が A-解析関数であるゆえできるわけであるが，たとえば $\psi(x, z)=f_0(x)-z$ という関数について考えてみる. そのような関数ψに関しても

$$\sup_U|\psi(x, z)|=\sup_{\dot{U}}|\psi(x, z)|$$

が証明されるわけである. ここで$\dot{U}$は空間 $\widetilde{M}_0$ で考えての U の（位相的）境界を表わす. もしこれが成立すれば Rickart の定理は証明される. なんとなれば $\dot{U}\cap U=\phi$, $U=\widetilde{M}_0-M_0$ なるゆえ $\dot{U}\subset M_0$ となり

$$\sup_U|\psi(x,z)|=\sup_{\dot{U}}|\psi(x,z)|\leqq\sup_{M_0}|\psi(x, z)|=\sup_{M_0}|f_0(x)-z|=0$$

これから $\sup\limits_{\widetilde{M}_0}|\psi(x, z)|=\sup\limits_{\widetilde{M}_0}|f_0(x)-z|=0$ となり，その結果 $\widetilde{M}_0=M_0$ となるからである. それゆえ $\sup\{|\psi(x,z)|;\ (x,z)\in U\}=\sup\{\psi(x,z);\ (x,z)\in\dot{U}\}$ を証明することだけが残されている. いまそれが否定されたとすれば

$$\sup_U(|\psi(x,z)|)>\sup_{\dot{U}}(|\psi(x,z)|).$$

そのとき $(A_1)_{\bar{U}}$ と f_0 とで生成された関数環 A_2 の Šilov 境界 ∂_{A_2} と U とは交わる. $\partial_{A_2}\cap U\ni p$ とすれば，pのある近傍 $V(\subset U)$ の上で f_0 は A_1 の関数によって一様に近似できる（ψ は A_1-解析関数なるゆえ). また $\partial_{A_2}\ni p$ であるために $(x_0,z_0)\in V$ と $f\in A_2$ が存在して

$$|f(x_0, z_0)|>\sup_{\bar{U}-V}(|f(x, z)|)\geqq\sup_{\dot{V}}(|f(x, z)|).$$

ところでこの f は$\bar{V}$ の上で A_1 の関数で一様に近似できるから，ある $g\in A_1$ で

$$|g(x_0, z_0)|>\sup_{\dot{V}}(|g(x, z)|).$$

これは $(A_1)_{\widetilde{M}_0}$ における局所最大値原理に反する.

第5章 関数環 (2)

この章では主として Hardy クラス H^p に関する理論について述べる. Hardy クラスの研究は古典的なものであるが, それを関数環に付随したものと考えて抽象的に考え, 古典的な Hardy クラスの理論を拡張すると共に, さらに発展させようとするわけである. 5·1 節では古典的に有名な F. and M. Riesz の定理および Szegö の定理について関数環の立場から考える. そのあと 5·2 節の準備のため H^1 の分解について述べる. 5·2 節ではディスク環の閉イデアルの形を決定した Rudin の定理を証明する. つぎの 5·3 節ではシフト作用素について述べる. シフト作用素については最近盛んに研究されたが, ここでは基本的な事がらを証明するにとどめる.

5·1 $\boldsymbol{H}^1$ 空間, $\boldsymbol{H}^2$ 空間

複素平面上の単位開円板で解析的な関数 $f(z)$ で $f_r(f_r(\theta)=f(re^{i\theta}))$ が $r\to 1$ のとき L^p-ノルム $(0<p\leqq\infty)$ で有界となるもの全体の集合を H^p で表わす. これを Hardy クラス H^p とよぶ. H^p については古典的な多くの定理が知られているが, ここでは H^p をディスク環 A に付随したものと考え, 関数環での理論として Hardy クラスの理論を展開していく. この理論はもっと一般な関数環, すなわち Dirichlet 環, ログモジュラー環にも拡張されることについてもふれたいと思う.

H^p 空間は上で定義したが, これはまたつぎのように, 単位円の上の関数として定義できる. すなわち $1\leqq p<\infty$ のとき H^p の任意の元 f に対して $\tilde{f}(\theta)=\lim\limits_{r\to 1} f(re^{i\theta})$ は単位円周上ほとんどいたるところ存在し, それが単位円の上の関数と考えて L^p に入る. すなわち $\int|\tilde{f}(\theta)|^p d\theta<\infty$ となることがわかる. また逆に円周上の L^p にふくまれる関数 f の Poisson 積分, すなわち

$$f(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)P_r(\theta-t)dt$$

(ここで $P_r(\theta)=(1-r^2)/(1-2r\cos\theta+r^2)$) で f を単位開円板に拡張したとき, そこで解析的になるとすれば $f(re^{i\theta})$ は H^p にふくまれる. その結果 H^p は単

位円の上の L^p-関数で，その Poisson 積分が単位開円板で解析的であるものの全体と考えてよい．また H^p は

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} f(\theta)d\theta=0 \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

となる L^p-関数全体と考えてもよい．これらの H^p についての定義についてのくわしいことは，Rudin［文献 39)，p. 328］または巻末文献⑧，p. 39 を見られたい（巻末補遺を見よ）．

つぎに Borel 集合体 $\mathfrak{B}$ の上で定義された有界測度 m に対して，可算加法的集合関数 μ が m に対して**絶対連続**（absolutely continuous）といわれるのは $m(E)=0$ $(E\in\mathfrak{B})$ ならば $\mu(E)=0$ のときである．また μ が m に対して**特異**（singular）であるとは，ある $E_0\in\mathfrak{B}, m(E_0)=0$ が存在して，すべての $A\in\mathfrak{B}$ に対して $\mu(A)=\mu(A\cap E_0)$ であるときにいう．つぎの Radon-Nikodym の定理は後で必要となる：Borel 集合体 $\mathfrak{B}$ 上の任意の可算加法的集合関数 μ は，$\mathfrak{B}$ 上の有界測度 m に関して，m に対して絶対連続な μ_a と，m に対して特異な μ_s との和として一意に表わされる，すなわち $\mu=\mu_a+\mu_s$（証明は，たとえば河田［文献 69)，p. 161］を見よ）．

A.　F. and M. Riesz の定理

いま A をディスク環とし，A_0 を $\int fd\theta=0$ となる $f\in A$ の全体とする．μ を単位円の上の一つの正測度とし，Hilbert 空間 $L^2(d\mu)$ を考える．A_0 で張られた $L^2(d\mu)$ の中の閉部分空間の上への関数 1 の射影を F とすれば，もちろんつぎのようになる．

$$\inf_{f\in A_0}\int|1-f|^2d\mu=\int|1-F|^2d\mu.$$

いま μ を単位円上の有界実測度とし，任意の $f\in A_0$ に対して $\int fd\mu=0$ とする．そのとき μ は Lebesgue 測度の定数倍となることがわかる．なんとなれば $\lambda=\int d\mu$，$d\mu_1=d\mu-(1/2\pi)\lambda d\theta$ とおく．μ_1 は実測度で A の任意の関数 f と直交する：

$$\int fd\mu_1=\int[f-f(0)]\,d\mu_1+f(0)\int d\mu_1=0+0=0.$$

ところでディスク環では ReA は $C_R(\Gamma)$ の中で稠密（ディスク環は Dirichlet 環．Γ は単位円）であるからAのすべての元と直交する実測度は 0 となる．したがって $\mu_1=0$ であり，その結果 $d\mu=(1/2\pi)\lambda d\theta$ となる．このことから

定理 5·1 μを単位円Γの上の有限正 Baire 測度で，関数 1 が A_0 で張られた $L^2(d\mu)$ の閉部分空間に入らないとする．F をこの部分空間への 1 の射影とする．そのときつぎのことが成立する．

（i） 測度 $|1-F|^2d\mu$ は Lebesgue 測度の定数倍である．とくに Lebesgue 測度は μ に関して絶対連続である．

（ii） 関数 $(1-F)^{-1}$ は H^2 にふくまれる．

（iii） h を正規 Lebesgue 測度に関する μ の微分とすれば，関数 $(1-F)h \in L^2=L^2((1/2\pi)d\theta)$ ここで正規 Lebesgue 測度とは $(1/2\pi)d\theta$ をいう．

証明 （i） A_0 で張られた $L^2(d\mu)$ の閉部分集合をSで表わす．FはSの上への 1 の射影であるから $(1-F)$ は S と直交する．すなわち $(1-F)\perp A_0$ である．そして $f\in A_0$ で $(1-F)\perp(1-F)f$ となる．なんとなればFは$L^2(d\mu)$の中で A_0 の元の列 $\{f_n\}$ の極限であり，もし $f\in A_0$ なら $f(1-f_n)\in A_0$ で，これは $f(1-F)$ に収束する．ゆえに $f(1-F)\in S$ となり，$(1-F)\perp(1-F)f$ となる．いいかえれば任意の $f\in A_0$ で

$$\int f|1-F|^2d\mu=0$$

上で注意したことにより測度 $|1-F|^2d\mu$ は Lebesgue 測度の定数倍となる．$1\notin S$ なるゆえ $1-F\neq 0$．ゆえに $|1-F|^2d\mu$ は Lebesgue 測度の 0 でない定数倍である．

（ii） さて $|1-F|^2d\mu=kd\theta\,(k\neq 0)$ であり μ_a をμの絶対連続部分を表わすとすれば，すなわち $d\mu=d\mu_a+d\mu_s$ で $d\mu_a$ を Lebesgue 測度に関しての絶対連続部分，$d\mu_s$ を特異部分と分解したとすれば

$$d\mu_a=|1-F|^{-2}kd\theta$$

これは $(1-F)^{-1}\in L^2=L^2((1/2\pi)d\theta)$ を表わす．$f\in A_0$ とすれば

$$k\int(1-F)^{-1}f\,d\theta=k\int(1-\bar{F})f|1-F|^{-2}d\theta=\int(1-\bar{F})f\,d\mu=0$$

とくに $f(\theta)=e^{in\theta}(n=1,2,3,\cdots)$ とおくことにより，$(1-F)^{-1}\in H^2$ となる．

(iii) $d\mu=(1/2\pi)hd\theta+d\mu_s$ (μ_s は特異部分) とおける. $|1-F|^2d\mu$ は $d\theta$ の定数倍であるから $(1-F)$ は測度 μ_s に関して到る所 0 となる関数である. すなわち

$$|1-F|^2d\mu=\frac{1}{2\pi}|1-F|^2hd\theta$$

しかし $|1-F|^2d\mu=kd\theta$ なるゆえ $|1-F|^2h=\rho$ ($a.e.\ d\theta$), ここで ρ は 0 でない定数である. しかしそのとき

$$|1-F|h=\rho\ |1-F|^{-1}$$

そして $(1-F)^{-1}\in L^2((1/2\pi)d\theta)$ なるゆえ $(1-F)h\in L^2$ となる. qed

系 5・2 μ を単位円上の正測度とし, その絶対連続部分を μ_a とすれば

$$\inf_{f\in A_0}\int|1-f|^2d\mu=\inf_{f\in A_0}\int|1-f|^2d\mu_a$$

とくに任意の特異測度 μ に対して関数 1 は A_0 の $L^2(d\mu)$ での閉包にふくまれる.

証明 A_0 の $L^2(d\mu)$ の中での閉包の上への関数 1 の射影を F とすれば $\int|1-F|^2d\mu=\inf_{f\in A_0}\int|1-f|^2d\mu$ となる. 上の定理の証明の中で述べたように $(1-F)$ は μ の特異部分に対してほとんどいたるところ 0 となる. F を $L^2(d\mu_a)$ の中の関数とみなせば, A_0 の $L^2(d\mu_a)$ での閉包にふくまれる. さらに $1-F$ は $d\mu_s$ に関していたるところ 0 なるゆえ $(1-F)\perp A_0(L^2(d\mu_a))$. ゆえに

$$\inf_{f\in A_0}\int|1-f|^2d\mu=\int|1-F|^2d\mu=\int|1-F|^2d\mu_a=\inf_{f\in A_0}\int|1-f|^2d\mu_a.$$ qed

系 5・3 μ を単位円の上の有限複素 Baire 測度とし A_0 と直交しているとする. すなわち $\int fd\mu=0$ $(f\in A_0)$ とする. そのとき $\mu_a\perp A_0$ かつ $\mu_s\perp A_0$ となる.

証明 ρ をつぎの二つの性質をもつ有界正測度とする.

(i) μ は ρ に関して絶対連続で, その Radon-Nikodym 微係数 $d\mu/d\rho$ は有界.

(ii) $d\rho/d\theta\geqq 1/2\pi$.

もし $d\mu=(1/2\pi)hd\theta+d\mu_s$ とすれば, 上のような測度の一つは

$$d\rho=\frac{1}{2\pi}(1+|h|)d\theta+d|\mu_s|$$

である．ここで $d|\mu_s|$ は複素測度 μ_s の全変分を表わす．$f\in A_0$ に対して ρ の性質（ii）より

$$\int|1-f|^2d\rho\geqq\frac{1}{2\pi}\int|1-f|^2d\theta\geqq1$$

もし F を A_0 の $L^2(d\rho)$ での閉包の上への関数 1 の射影とすれば上の式よりつぎのようになる．

$$\int|1-F|^2d\rho\geqq1$$

上の定理より $(1-F)^{-1}\in H^2$ で $(1-F)$ $(1+|h|)\in L^2=L^2((1/2\pi))d\theta$ となり，それゆえに $(1-F)h\in L^2$ となる．つぎに $g\in A_0$ に対して $\int(1-F)gd\mu=0$ となる．なんとなれば，A_0 の中に関数列 $\{f_n\}$ が存在して $f_n\to F(L^2(d\rho))$．ここで $d\mu/d\rho$ は有界なるゆえ

$$\int(1-F)gd\mu=\lim_{n\to\infty}\int(1-f_n)gd\mu$$

おのおのの $(1-f_n)g$ は $\in A_0$ となり，かつ $\mu\perp A_0$ から

$$\int(1-F)gd\mu=0\quad(g\in A_0).$$

さて $(1-F)$ は ρ の特異部分に関してほとんどいたるところ 0 なるゆえ $d\mu_s$ に関してもほとんどいたるところ 0．かくして

$$(1-F)d\mu=\frac{1}{2\pi}(1-F)hd\theta.$$

それゆえ

$$\int(1-F)ghd\theta=0\ (g\in A_0).$$

さて g_n を A の中の関数列で $L^2((1/2\pi)d\theta)$ において $(1-F)^{-1}$ に収束するものとする．これは $(1-F)^{-1}\in H^2$ なることからそのような $\{g_n\}$ が存在する．ここで，もちろん

$$\int g_nf(1-F)hd\theta=0\quad(f\in A_0)$$

となり $(1-F)h\in L^2$, $g_n\to(1-F)^{-1}(L^2)$ なるゆえ任意の $f\in A_0$ で $\int fhd\theta=0$

となる．これは $\mu_a \perp A_0$ なることを示し，したがってまた $\mu_s \perp A_0$ である．

qed/

この系からつぎの F. and M. Riesz の定理が導かれる．これには H. Helson [文献 70)] による証明もある．

定理 5·4 (F. and M. Riesz)　μ を単位円の上の有限複素 Baire 測度でつぎが成立すると仮定する．

$$\int e^{in\theta} d\mu(\theta) = 0 \qquad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

そのとき μ は Lebesgue 測度に関して絶対連続となる．

証明　定理の仮定より $\mu \perp A_0$ となる．もし $\mu = \mu_a + \mu_s$ とすれば系 5·3 より $\mu_a \perp A_0$, $\mu_s \perp A_0$ となる．いま μ_s の方を考えると系 5·2 より A_0 の中の適当な関数列 $\{f_n\}$ で $L^2(d|\mu_s|)$ において $f_n \to 1$ となる．$\mu_s \perp A_0$ から

$$\int d\mu_s = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu_s = 0$$

それゆえ $1 \perp \mu_s$ となる．つぎに特異測度 $e^{-i\theta} d\mu_s$ は A_0 と直交することは明らかなるゆえ，上で証明したと同様な方法で $1 \perp e^{-i\theta} d\mu_s$. すなわち $\int e^{-i\theta} d\mu_s(\theta) = 0$ となる．このことから今度は $e^{-2i\theta} d\mu_s$ が A_0 と直交することになる．これをくりかえしていけば

$$\int e^{in\theta} d\mu_s(\theta) = 0 \qquad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \cdots)$$

これは μ_s は零測度なることを示す．それゆえ $\mu = \mu_a$ で絶対連続となる．

qed/

B. Szegö の定理

つぎに古典的に有名な Szegö [文献 71)] の定理を証明していこう．まえにも指適したように，この証明は関数環にもとずく考え方でやられる．そしてほとんど同様な方法でディスク環よりもっと一般な関数環に関しても証明されるのである．まずつぎの定理から始める．

定理 5·5　h を単位円上の負でない Lebesgue 積分可能な関数とする．そのとき

$$\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log h(\theta) d\theta\right] = \inf_{f \in A_0} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h e^{\mathrm{Re} f} d\theta.$$

ここでこの式の左辺は $\log h$ が積分可能でないとき 0 であると解釈する．

証明 h は $h\geqq 0$ となる積分可能な関数なるゆえ $\log h$ が積分可能でないのは $\int \log h d\theta=-\infty$ の場合だけである．それゆえ $\log h$ が積分可能か否かにかかわらず，つぎが成立する．

$$\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int \log h d\theta\right]\leqq \frac{1}{2\pi}\int h d\theta.$$

これは h が階段関数 (simple function) のとき上の式の左辺は，$h=\sum_{i=1}^{n} h_i e_{M_i}$ (e_{M_i} は M_i の特性関数) で M_i の Lebesgue 測度を l_i とすれば $\exp\left[\frac{1}{2\pi}\cdot \sum_i (\log h_i) l_i\right]=\prod_i h_i^{l_i/2\pi}$ であり，右辺は $\sum_i \frac{l_i}{2\pi} h_i$ で幾何平均と算術平均との関係に帰着される．一般の h の場合，それを階段関数で近似できるから，その極限を考えればよい．さて g を任意の実数値積分可能関数としたとき，上の式は関数 he^g に対してももちろん成り立つ．もしそのような g が $\int g d\theta=0$ を満たせば

$$\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int \log h d\theta\right]\leqq \frac{1}{2\pi}\int he^g d\theta.$$

とくに $g=\mathrm{Re}\, f (f\in A_0)$ の場合だけ考えれば

$$(*)\quad \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int \log h d\theta\right]\leqq \inf\left\{\frac{1}{2\pi}\int he^g d\theta;\ g=\bar{g}\in L^1,\ \int g d\theta=0\right\}$$

$$\leqq \inf\left\{\frac{1}{2\pi}\int he^{\mathrm{Re} f};\ f\in A_0\right\}$$

ここで上の不等式で後の方の二つの下限の値は一値することはすぐにわかる．なんとなれば $\{\mathrm{Re} f : f\in A\}$ は $C_{\mathrm{R}}(\Gamma)$ (Γ は単位円) の中で稠密．さて g を $\int g d\theta=0$ となるような実 L^1-関数とするとき $\int g_n d\theta=0$ となる $\{g_n\}\subset L^\infty$ を適当に選べば，$|g_n|$ は $|g|$ に単調増加的に収束させうる．この場合 $\lim_{n\to\infty}\int he^{g_n} d\theta=\int he^g d\theta$ なるゆえ g は L^∞-関数と仮定してよい．しかし実 L^∞ 関数は $C_{\mathrm{R}}(\Gamma)$の中の，そして $\mathrm{Re} A$ の中の有界関数列の各点収束の極限となるから，上の式 (*) の右辺の方の二つの項は結局等しくなる．

さて $\log h$ が積分可能と仮定する．そして

$$\lambda=\frac{1}{2\pi}\int\log h d\theta$$

とし $g=\lambda-\log h$ とおく．そのとき g は実関数で $\in L^1$ となる．かつ $\int g d\theta=0$. また

$$\frac{1}{2\pi}\int he^g d\theta=\frac{1}{2\pi}\int e^\lambda d\theta=\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int\log h d\theta\right]$$

かくしてこの式と (*) とを考え合わせると，この場合は定理は証明された．つぎに $\log h$ が積分可能でないならば，任意の $\varepsilon>0$ に対して $\log(h+\varepsilon)$ は積分可能であるから

$$\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int\log(h+\varepsilon)\,d\theta\right]=\inf_{f\in A_0}\frac{1}{2\pi}\int(h+\varepsilon)e^{\mathrm{Re}f}d\theta.$$

ここで $\varepsilon\to 0$ とすれば定理は証明される． qed

定理 5·6 (Szegö; Kolmogroff-Krein) μ を単位円の上の有限正 Baire 測度で，h を正規 Lebesgue 測度に関する μ の微分係数とすれば

$$\inf_{f\in A_0}\int|1-f|^2 d\mu=\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log h(\theta)d\theta\right]$$

証明 定理 5·5 より

$$\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int\log h d\theta\right]=\inf_{g\in A_0}\frac{1}{2\pi}\int he^{2\mathrm{Re}g}d\theta.$$

さて $e^{2\mathrm{Re}g}=|e^g|^2$ であり，$g\in A_0$ ならば関数 e^g は $e^g=1-f(f\in A_0)$ の形となるから $e^{2\mathrm{Re}g}=|1-f|^2$. それゆえ

$$\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int\log h d\theta\right]\geqq\inf_{f\in A_0}\frac{1}{2\pi}\int h|1-f|^2 d\theta$$

つぎにこの反対の不等号が成立することを示そう．

さて $g\in A_0$ とし，上の式の h の代わりに $|1-g|^2$ を代入すれば

$$\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int\log|1-g|^2 d\theta\right]\geqq\inf_{f\in A_0}\frac{1}{2\pi}\int|1-f-g+fg|^2 d\theta$$

となるがこの式の右辺は $\geqq 1$ は明らかなる*)ゆえ $\log|1-g|^2$ は Lebesgue 積

*) Parseval の等式より明らか．$1-f-g+fg=1+F$, $F(0)=0$ なるゆえ $1/2\pi\int|1+F|^2 d\theta\geqq 1$ となる．文献 72), p. 125 参照．

分可能で $\int \log|1-g|^2 d\theta \geqq 0$ となる．ここで $|1-g|^2 = ke^p$（p は実 L^1-関数で $\int p d\theta = 0$, k は $k \geqq 1$ となる定数）とおける．ゆえに

$$\frac{1}{2\pi}\int |1-g|^2 h d\theta = k \cdot \frac{1}{2\pi}\int he^p d\theta \geqq \inf_{f \in A_0} \frac{1}{2\pi}\int he^{\mathrm{Re} f} d\theta$$

$$= \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int \log h d\theta\right]$$

それゆえ

$$\inf_{g \in A_0} \frac{1}{2\pi}\int |1-g|^2 h d\theta \geqq \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int \log h d\theta\right]$$

これと系 5·2 より定理は証明された．

qed

C． Hardy クラス H^1

ここでは Hardy クラス H^1 の性質について述べる．そのあと，それらの性質および B で証明された Szegö の定理が一般の関数環では，どのようになるかについても言及する．

定理 5·7 $f \in H^1$ で $f(0) = 1/2\pi \int f(\theta) d\theta \neq 0$ とする．そのとき $\log|f(\theta)|$ は Lebesgue 積分可能で

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(\theta)| d\theta \geqq \log|f(0)|.$$

証明 まず $f \in H^2$ とする．Szegö の定理を測度 $(1/2\pi)|f|^2 d\theta$ で考えれば

$$\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int \log|f|^2 d\theta\right] = \inf_{g \in A_0} \frac{1}{2\pi}\int |1-g|^2 |f|^2 d\theta.$$

ところで $g \in A_0$ で

$$\frac{1}{2\pi}\int |1-g|^2 |f|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int |f-fg|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int |f(0)-p|^2 d\theta.$$

ここで p は A_0 の中のある関数である．この最後の積分は $|f(0)|^2$ より小さくはないから*)

$$\frac{1}{2\pi}\int \log|f(\theta)| d\theta \geqq \log|f(0)|.$$

もし f が H^2 にふくまれないとすれば，H^2 の中に関数列 f_n が選べて $f_n(0) = f(0)$ でかつ $f_n \to f$ (L^1) となる．f_n では

*) 定理 5·6 の証明参照．

$$\frac{1}{2\pi}\int \log|f_n|d\theta \geqq \log|f_n(0)|$$

となるからここで $n\to\infty$ とすればよい. *qed*

系 5·8 0でない H^1 の任意の元 f に対して $\log|f(\theta)|$ は積分可能で

$$\frac{1}{2\pi}\int \log|f|d\theta \geqq \log|f(0)|.$$

証明 f は0でないゆえ $f(z)=z^n g(z)$, $g(0)\neq 0$ と書くことができる. もちろん $g\in H^1$ で $|g(e^{i\theta})|=|f(e^{i\theta})|(a.e.)$. この g に上の定理を適用すればよい.

系 5·9 恒等的に0でない H^1 の任意の関数 f は単位円の Lebesgue 測度 >0 の集合の上で値0をとることはできない.

証明 上の系で $\log|f(\theta)|$ が積分可能なることから明らか. *qed*

定理 5·10 H^1 の任意の関数は H^2 の二つの関数の積として表わされる.

証明 $f\in H^1$ を H^2 の二つの関数に分解するとき $f(0)\neq 0$ と仮定して一般性を失わない. なんとなれば $f(0)=0$ のとき $f=z^n g$, $g(0)\neq 0$ の形となるからである. $f(0)\neq 0$ なら定理 5·7 より $\log|f|$ は積分可能であり, Szegö の定理より正測度 $d\mu=(1/2\pi)|f|d\theta$ で定数関数1は A_0 の $L^2(d\mu)$ での閉包に入らない. ゆえに定理 5·1 (i) より $|f|=k|1-F|^{-2}(a.e.)$. ここで F は A_0 の $L^2(d\mu)$ での閉包の上への1の射影を表わし, k は0でない定数である. 同じ定理により $(1-F)^{-1}\in H^2$ で $(1-F)f\in L^2$ である. $f\in H^1$ なることから $(1-F)f\in L^2$ のみならず H^2 の中のふくまれることは明らかであるから f は次のように H^2 の二つの関数の積に分解される: $f=(1-F)^{-1}\cdot(1-F)f$. *qed*

定理 5·11 h を単位円の上の $h\geqq 0$ となる Lebesgue 積分可能関数とする. h が0でない H^2 の関数 f で $h=|f|^2$ の形にかけるための必十条件は $\log h$ が積分可能となることである.

証明 もし $h=|f|^2$ $(f\neq 0,\ f\in H^2)$ ならば, 系 5·8 より $\log h$ は積分可能となる. 他方 $\log h$ が積分可能なら $h=k|1-F|^{-2}$ となる. これは前の定理の証明の中にある. *qed*

さてこれらの定理は一般の'コンパクト Hausdorff 空間 X の上の Dirichlet 環 A の場合に拡張できる. μ を X の上の一つの有限正 Baire 測度としたとき $1\leqq p<\infty$ のとき $H^p(d\mu)$ をもって A の $L^p(d\mu)$ での閉包であると定義する. X が単位円で A をディスク環とし $d\mu=(1/2\pi)d\theta$ としたときの $H^p(d\mu)$ は古

典的な Hardy クラス H^p と一致する．その場合ディスク環 A に対しては f, $g\in A$ で

$$\frac{1}{2\pi}\int fgd\theta=f(0)g(0)=\frac{1}{2\pi}\int fd\theta\cdot\frac{1}{2\pi}\int gd\theta.$$

これは $d\mu=(1/2\pi)d\theta$ が A の上の乗法測度になることを示す．このことから一般の Dirichlet 環 A の場合にも 0 でない正 Baire 乗法測度 m, すなわち $f, g\in A$ で $\int fgdm=\int fdm\cdot\int gdm$ となるものを固定する．そしてその m に対して $H^p=H^p(dm)$ を作り，その H^p について議論を進めていこうというわけである．$A_0=\{f\in A:\int fdm=0\}$ とおいたとき多少の例外を除いて上で述べて来た，単位円での古典的な H^p の理論と同様な結果が得られる．証明も多少複雑にはなるが同じ方向によって行なわれる．それゆえ結果だけ述べるにとどめる．

（1） μ を X の上の正測度で関数 1 が A_0 の $L^2(d\mu)$-閉包に入らないとする．F をその閉包の上への 1 の射影とするとき測度 $|1-F|^2d\mu$ は dm の 0 でない定数倍となる．また関数 $(1-F)^{-1}\in H^2(dm)$ で $h=d\mu/dm$ とおけば，$(1-F)h\in L^2(dm)$ となる．

（2） μ を X の上の正測度で $d\mu_a=(d\mu/dm)dm$ とする．そのとき

$$\inf_{f\in A_0}\int|1-f|^2d\mu=\inf_{f\in A_0}\int|1-f|^2d\mu_a.$$

とくに μ が m と互いに特異的ならば，1 は A_0 の $L^2(d\mu)$-閉包にふくまれる．

（3） μ を X の上の有界複素測度とし A_0 と直交すると仮定する．そのとき m に関する μ の絶対連続部分，特異部分はおのおの A_0 と直交する．

（4） (Szegö の定理) μ を X の上の正測度とすれば

$$\inf_{f\in A_0}\int|1-f|^2d\mu=\exp\left[\int\log\left(\frac{d\mu}{dm}\right)dm\right]$$

（5） f を $\int fdm\neq0$ となる $H^1(dm)$ の元とすれば，$\log|f|$ は m に関して積分可能で

$$\int\log|f|dm\geqq\log\left|\int fdm\right|$$

（6） h を $h\in L^1(dm)$ で $h\geqq0$ とする．そのとき h は $f\in H^2$, $\int fdm\neq0$ となる f で $h=|f|^2$ となるための必十条件は $\log h\in L^1(dm)$ となることであ

る.

これ等は単位円の古典的な定理の拡張になっているわけであるが, F. and M. Riesz の定理は一般の Dirichlet 環には拡張できないことがわかっている. F. and M. Riesz の定理を証明しようとするとき, $\mu\perp A_0$ と仮定すれば上の (3) から $\mu_a\perp A_0$, $\mu_s\perp A_0$ がでる. $\mu_s\perp A_0$ からは $\mu_s\perp 1$ となるが, ここで後の証明が続かなくなる. 実は 4·3 節で述べた Dirichlet 環A (Helson-Lowdenslager の例) では F. and M. Riesz の定理が成り立たないことが証明される (文献⑧, p. 60).

また一般の Dirichlet 環においては 0 でない H^1 の関数fで $\log|f|$ の積分可能性は保障されない.

$$\log\left|\int fdm\right|\leqq\int\log|f|dm$$

が成り立つわけだが, ここで$\int fdm\neq 0$ なら $\log|f|$ は積分可能となる. しかし $f\neq 0$ で$\int fdm=0$, そして $\log|f|$ が積分不可能という場合がありうる. 最後にこの Jensen の不等式について一言ふれる. 一般の Dirichlet 環に対する Jensen の不等式の証明は Arens and Singer [文献 32)] によって始めて証明された. つぎの証明は Wermer によるものである.

Xをコンパクト Hausdorff 空間, AをXの上の Dirichlet 環としmをXの上の乗法正測度とする. そのとき $H_1\ni f$ に対して $\int\log|f|dm\geqq\log\left|\int fdm\right|$ を証明する. まず $f\in A$ とし $\varepsilon>0$ を任意にとる. そのとき $\log(|f|+\varepsilon)$ はXの上の実数値連続関数となるからAが Dirichlet 環であることより $g=u+iv\in A$が存在して

$$|u(x)-\log(|f|(x)+\varepsilon)|<\varepsilon \qquad (x\in X)$$

すなわち

$$u-\varepsilon<\log(|f|+\varepsilon)<u+\varepsilon$$

となる. $h=e^{-g}$ とおけば $h\in A$ で $|h|=e^{-u}$. またXの上では

$$|fh|=|fe^{-g}|=|f|e^{-u}<e^{\varepsilon}$$

mはAの上で乗法であるから$\int fdm\cdot\int hdm=\int f\cdot e^{-g}dm$, そして

$$\left|\int fdm\right|\left|\int hdm\right| \leqq \sup_X |fe^{-g}| < e^{\varepsilon}.$$

それゆえ

$$\log\left|\int fdm\right| + \log\left|\int hdm\right| < \varepsilon$$

また $|h| = e^{-u}$ と $e^{-\int udm} \leqq \int e^{-u}dm$ なることから

$$\log\left|\int fdm\right| - \int udm < \varepsilon.$$

さて $u < \varepsilon + \log(|f| + \varepsilon)$ なるゆえ

$$\int udm < \varepsilon + \int \log(|f| + \varepsilon)dm,$$

$$\log\left|\int fdm\right| < 2\varepsilon + \log(|f| + \varepsilon)dm.$$

ここで $\varepsilon \to 0$ とすれば $f \in A$ の場合の Jensen の不等式が得られた. $f \in H^1(dm)$ の場合は A の関数により $L^1(dm)$ で収束させうるから明らか.

注意 いままでにあげた Dirichlet 環における結果は, Hoffman [文献 40)] によってログモジュラー環に拡張された. また F. and M. Riesz の定理の一般関数環への拡張については, 最近いろいろやられているが, とくに Ahern [文献 73)], Glicksberg [文献 74)] のものが興味深い.

D. H^1 の分解

ここでは後の節 "関数環の閉イデアル" のための準備をする.

いま f を単位円板の上の 0 でない H^1-関数とする. そのとき f は単位円のほとんどいたるところの点で

$$f(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1} f(re^{i\theta})$$

をもち

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) P_r(\theta - t)dt$$

となり, $\log|f(e^{it})|$ は Lebesgue 積分可能である (系 5・8). さて

$$F(z) = \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log|f(e^{i\theta})| d\theta\right]$$

とおけば, F は単位円板の上の解析関数であり

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{i\theta})| d\theta \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})| d\theta$$

となるゆえまた $F\in H^1$ となる．これは u を $\log|f|$ の Poisson 積分としたとき $|F|=e^u$ となることより明らか．また単位円の上では $|F|=|f|(a.e.)$ となる．もちろん F は単位開円板の内では0点をもたないし，つぎが成立する．

$$\log|F(re^{i\theta})|=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(e^{it})|P_r(\theta-t)dt$$

ここで

$$\log|f(re^{i\theta})|\leqq\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(e^{it})|P_r(\theta-t)dt=\log|F(re^{i\theta})|$$

なるゆえ単位開円板の任意の点 $z(|z|<1)$ では $|F(z)|\geqq|f(z)|$ となる．

さて関数 g を

$$g(z)=\frac{f(z)}{F(z)}$$

とおけば g は単位開円板の上で有界となる．実際 $|g(z)|\leqq|f(z)/F(z)|\leqq1$ で，単位円の上では $|g(e^{i\theta})|=1$ $(a.e.)$ となる．かくして任意の $f\in H^1$ は単位円の上で $|g(e^{i\theta})|=1$ $(a,e.)$ となる解析関数 g と特別な形をした H^1-関数(後で定義する外部関数) F に分解できたわけである．

定義　単位円板上で解析的な関数 g が $|g(z)|\leqq1$ で単位円の上で $|g(e^{i\theta})|\doteqdot1$ $(a.e.)$ なるとき g は**内部関数** (inner function) といわれ，また単位円板の上の解析関数 F が単位円の上で定義された一つの実数値積分可能関数 k で

$$F(z)=\lambda\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}k(\theta)d\theta\right]$$

の形となるとき F は**外部関数** (outer function) といわれる．ここで λ は $|\lambda|=1$ となる複素数である．この F が H^1 にふくまれるための必十条件は e^k が積分可能となることであり，F が H^1 にふくまれる外部関数ならば必然的に $k(\theta)=\log|F(e^{i\theta})|(a.e.)$ となる．

つぎに外部関数に関して少し考えて見よう．

定理 5·12　F を H^1 にふくまれる0でない関数とする．そのときつぎの条件は同等である．

(i)　F は外部関数である．

(ii)　$f\in H^1$ を単位円上で $|f|=|F|(a.e.)$ となる任意の関数とすれば，単位開円板の上で $|F(z)|\geqq|f(z)|$ となる．

(iii) $\log|F(0)|=1/2\pi\int_{-\pi}^{\pi}\log|F(e^{i\theta})|d\theta.$

証明 (i)→(ii) の証明は既に与えた．(ii)→(i) の証明：いま (ii) が成立したとする．そのときGをつぎのように定義する．

$$G(z)=\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\log|F(e^{i\theta})|d\theta\right]$$

そのときGは外部関数で単位開円板の上で $|F(z)|\leqq|G(z)|$ で，また単位円の上では $|F|=|G|$ なるゆえ (ii) の仮定より $|z|<1$ で $|G(z)|\leqq|F(z)|$．かくして F/G は $|z|<1$ で解析関数でその絶対値は1となる．それゆえ $F=\lambda G$ ($|\lambda|=1$) となりFは外部関数となる．(iii) は H^1 の中の外部関数についてはいつも成立するから (iii) を仮定してFが外部関数なることを証明する．上のようにGを定義すれば F/G は単位円板の上ではその絶対値は$\leqq1$ となり，$z=0$ ではちょうど1となる．それゆえ最大値の原理より $F/G=\lambda$ ($|\lambda|=1$) となり，Fは外部関数となる． *qed*

定理 5·13 fを0でない H^1 の関数とする．そのときfはつぎのように分解される：$f=gF$，ここでgは内部関数でFは外部関数である．またこの分解は絶対値1の定数を除いて一意である．

証明 分解されることはすでに述べた．分解を $f=gF$，g 内部関数，F 外部関数とする．もし$f=g_1F_1$ というもう一とおりの分解があったとする．そのとき単位円の上では $|F|=|F_1|(a.e)$ は明らかで，F_1，F_1 共に外部関数なるゆえ上の定理の証明より $F=\lambda F_1(|\lambda|=1)$ となる．それゆえまた $g=\lambda^{-1}g_1$ となる． *qed*

つぎに Blaschke 積に関しての二，三のことがらを述べる．

定理 5·14 fを単位円板の上の有界解析関数とし $f(0)\neq0$ と仮定する．もし $\{\alpha_n\}$ を単位開円板でのfの0点の列とするならば，$\prod_n|\alpha_n|$ は収束する．すなわち $\sum(1-|\alpha_n|)<\infty$ となる．ここで $\{\alpha_n\}$ の中ではfの重根はくりかえして取ることにする．

証明 $||f||\leqq1$ としても一般性を失わない．またfの0点が有限個であるときは問題はない．それゆえfが可付番無限個の0点 α_1，α_2，α_3，…をもつときに考えればよい．そのとき $\prod_n|\alpha_n|$ が収束することを証明する．いま $B_n(z)$ をつぎのように定義する．

$$B_n(z)=\prod_{k=1}^{n}\frac{z-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_kz}$$

そのとき $B_n(z)$ は有理関数で単位閉円板の上で解析的であり，単位円の上では $|B_n(e^{i\theta})|=1$ であることは明らか．つぎに関数 f/B_n を考えると，これは単位円板の上で有界解析関数で単位円の上では

$$\frac{|f(e^{i\theta})|}{|B_n(e^{i\theta})|}=|f(e^{i\theta})|\leqq 1 \quad (a.e.)$$

なるゆえ $|z|<1$ では $|f(z)|\leqq|B_n(z)|$ となる．とくに $z=0$ では

$$0<|f(0)|\leqq|B(0)|=\prod_{k=1}^{n}|\alpha_k|$$

おのおのの k で $|\alpha_k|<1$ で，すべての n で $\prod_{k=1}^{n}|\alpha_k|\geqq|f(0)|>0$ なるゆえ $\prod_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|\neq 0$ となり $\prod_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|$ は収束した． *qed*

定理 5·15 $\{\alpha_n\}$ を単位開円板の上のすべて0でない複素数の列とする．そのとき

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{\alpha}_n}{|\alpha_n|}\frac{\alpha_n-z}{1-\bar{\alpha}_n z}$$

が単位開円板の中の任意のコンパクト集合の上で一様に収束するための必十条件は $\prod_n|\alpha_n|$ が収束すること，すなわち $\prod_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|=a>0$，いいかえれば $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\alpha_n|)<\infty$ となることである．またこの条件が成立するときは α_1，$\alpha_2,\cdots$ を0点としてもち，他に0点をもたない内部関数が存在する．上にあげた関数がそうである．

証明 まずつぎのように B_n をおく．

$$B_n(z)=\prod_{k=1}^{n}\frac{\bar{\alpha}_k}{|\alpha_k|}\frac{\alpha_k-z}{1-\bar{\alpha}_k z}$$

B_n は単位円板の上で解析的で，単位円の上では絶対値1である．もし $\{B_n\}$ が $|z|<1$ の中の任意のコンパクト集合の上で一様に一つの関数 B に収束すれば，B は単位開円板の上で解析的で $|B|\leqq 1$ となる．B は α_1，α_2，$\alpha_3,\cdots$ に0点をもつことは明らか．前の定理より $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\alpha_n|)<\infty$ となる．

さて今度は $\{\alpha_n\}$ が $\prod_n|\alpha_n|$ が収束するような条件をもつとする．そのとき与えられた単位開円板の中のコンパクト集合 K の上では $\left\{\left(\frac{\bar{\alpha}_k}{|\alpha_k|}\right)\frac{\alpha_k-z}{1-\bar{\alpha}_k z}\right\}$

のうち有限個の関数だけが K の上で 0 点をもつ．ここでその無限積が閉円板 $\{z:|z|\leqq r<1\}$ で一様に収束することを証明しよう．いま f_n をつぎのようにおく．

$$f_n(z)=\left(\frac{\bar{\alpha}_n}{|\alpha_n|}\right)\frac{\alpha_n-z}{1-\bar{\alpha}_n z}$$

そのとき

$$1-f_n(z)=\frac{1}{|\alpha_n|}\left[1-\frac{|\alpha_n|^2-\bar{\alpha}_n z}{1-\bar{\alpha}_n z}\right]+1-\frac{1}{|\alpha_n|}=\frac{1-|\alpha_n|}{|\alpha_n|}\left[\frac{1+|\alpha_n|}{1-\bar{\alpha}_n z}-1\right]$$

もし $|z|\leqq r$ なら

$$|1-f_n(z)|\leqq\frac{1-|\alpha_n|}{|\alpha_n|}\left[\frac{2}{1-r}+1\right]$$

$\sum(1-|\alpha_n|)<\infty$ から $\sum|1-f_n(z)|$ は $|z|\leqq r$ で一様に収束するから，また $|z|\leqq r$ の上で $\Pi f_n(z)$ は一様に絶対収束する［文献 75)，p. 264 参照］． qed

定義 解析関数 B がつぎのような形をもつとき，それを Blaschke **積**という．すなわち

$$B(z)=z^p\prod_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\bar{\alpha}_n}{|\alpha_n|}\frac{\alpha_n-z}{1-\bar{\alpha}_n z}\right]^{p_n}$$

ここで

（i） $p, p_1, p_2, \cdots$ は負でない整数

（ii） $\{\alpha_n\}$ は単位開円板の上の 0 でない互いに異なる複素数の列

（iii） $\prod_n|\alpha_n|^{p_n}$ は収束する．

定理 5・15 で知ったようにこの $B(z)$ は単位開円板の中の任意のコンパクト集合の上で一様に収束する．そして $B(z)$ は $z=0$ で p 位，$z=\alpha_n$ で p_n 位の 0 点をもつ．

定理 5・16 f を単位円板の上の 0 でない有界解析関数とするとき，f は Blaschke 積 B と 0 点をもたない解析関数 g とに分解される．すなわち $f=Bg$．

証明 $f\neq 0$ なるゆえ $f(z)=z^p h(z)$ $(h(0)\neq 0)$ となる．B を z^p と h の 0 点から作られる Blaschke 積とすれば，$g=f/B$ は単位円板の上で有界解析関数で 0 点をもたない．この分解 $f=Bg$ が一意であることは，Blaschke 積はその 0 点により一意にきまるから明らか． qed

この定理で f を内部関数とすれば，f は Blaschke 積 B と 0 点をもたない内

部関数 g とに分解されることになる．さて0点をもたない内部関数 g に対してつぎが成立する．

定理 5·17 g を0点をもたない内部関数とし $g(0)>0$ と仮定する．そのとき単位円の上に唯一つの正特異測度 μ が存在して

$$g(z)=\exp\left[-\int\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\mu(\theta)\right]$$

証明 g は単位開円板の上で解析的で0点をもたないゆえ $g=e^{-h}$（h は単位開円板の上で解析的）と書ける．$|g(z)|\leqq 1$ なるゆえ h の実数部分は負ではない．$h=u+iv$ とおけば $u\geqq 0$ となる．かくして u は負でない調和関数であるが，u はつぎのように単位円の上の正測度 μ で一意に表わせる．

$$u(re^{i\theta})=\int P_r(\theta-t)d\mu(t).$$

これは Herglotz の定理として知られている（文献⑧，p. 34 または Rudin [39) p. 232] 参照)．また $g(0)>0$ であるから $v(0)=0$ となる．かくして

$$h(z)=\int\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\mu(\theta)$$

となる*⁾．g は内部関数なるゆえ単位円の上で，その絶対値はほとんどいたるところで1である．$|g|=e^{-u}$ なるゆえこれは $a.e.\ \theta$ で $\lim_{r\to 1}u(re^{i\theta})=0$ となることを示す．しかしつぎのような Fatou の定理（文献 ⑧，p. 34）がある：$u(re^{i\theta})=\int P_r(\theta-t)d\mu(t)$ なるとき $\lim_{r\to 1}u(re^{i\theta})=2\pi\ d\mu/d\theta$ となる．これを用いて $d\mu/d\theta\equiv 0$. ゆえに μ は特異測度となる． *qed*

定義 $g(0)>0$ となり，0点をもたない内部関数 g を**特異関数**（singular function）という．

つぎに H^1-関数が Blaschke 積と特異関数と外部関数に分解されることを示す分解定理をつぎに証明する．

定理 5·18 $f\neq 0$ を単位円板の上の H^1-関数とする．そのとき f は一意に $f=BSF$ と分解される．ここで B は Blaschke 積，S は特異関数，F は H^1 の中の外部関数である．

---

*⁾ 調和関数に関する最大値原理より明らか．必要あらば v から $2k\pi$ を引いておく．

証明 fは $f=gF$, gは内部関数, Fは外部関数と絶対値1の複素数を別として分解されることはすでに知った(定理 5・13). B を g の点から作られた Blaschke 積とすれば $g=BS$ で S は0点をもたない内部関数である. g に絶対値1の複素数をかけることにより $S(0)>0$ とできる. すなわち $f=BSF$ と分解された. *qed*

定義 ここでFを f の**外部部分** (outer part), BS をf の**内部部分** (inner part) という.

5・2 関数環の閉イデアル

この節では関数環のイデアルの形をしらべる. イデアルで問題となることは多くあるが, つぎのことを考えて見る.

(1) 関数環Aの極大イデアルはどんなものか.

(2) 任意の純イデアルは極大イデアルの共通部分として表わされるか.

(3) Aの準素イデアル (primary ideal), すなわちそのイデアルをふくむ極大イデアルが唯一つしかないものはどんな形をしているか.

(4) 任意のイデアルは準素イデアルの共通部分として表わされるか.

ここでわれわれは, 関数環を考えているからイデアルは必然的に閉イデアルを意味することになる.

関数環の閉イデアルの形をしらべるのは, もちろん一般の関数環で考えられるわけであるが, ここではディスク環の場合に限る. 最後に一般の場合にふれることにする.

さてAをディスク環とする. Aの閉イデアルの例を二, 三考えて見よう.

a. λを単位閉円板の一点とするとき, $M=\{f\in A : f(\lambda)=0\}$ はAの極大イデアルであり, 逆に A の任意の極大イデアルは, ある λ ($|\lambda|\leqq 1$) で上の M の形になることは既に述べた (4・1 節E項).

b. $z^2A=\{z^2f : f\in A\}$ を考える. これは $f(0)=f'(0)=0$ となる $f\in A$ の全体であるから, A の一つの閉イデアルである. イデアル z^2A をふくむ極大イデアルは $M=\{f\in A : f(0)=0\}$ のみであることは明らか. これは A の閉イデアルは一般に, それをふくむ極大イデアルの共通部分でないことを示している. ここで z^2A はもちろん準素イデアルである.

c.　$\{\alpha_n\}$ を単位開円板の上の点列とし，$\{p_n\}$ を負でない整数の列とする．J を点 α_n において少くとも p 次の 0 点をもつ A の関数の全体とすれば，J は A の閉イデアルとなる．ここで J は $\{0\}$ となる場合もおこりうるが，$\{\alpha_n\}$ が単位円に急速に近づき，p_n が余り急激に大きくならず，かつ $\{\alpha_n\}$ の単位円での集積点の集合が Lebesgue 測度 0 となるときは $J\neq\{0\}$ となる．たとえば $\alpha_n=1-2^{-n}$，$p_n=n$ となる場合である．

d.　K を単位円の上の Lebesgue 測度 0 の閉集合としたとき，$J_K=\{f\in A : f(K)=0\}$ とおく．そのとき J_K は $\{0\}$ でない A の閉イデアルである．$J_K\neq\{0\}$ なることは Fatou の定理（定理 4·25）より明らか．

e.　つぎに $F(z)$ を

$$F(z)=\exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

とおく．関数 F は A にはふくまれない．$M=\{f\in A : f(1)=0\}$ としたとき，$F(z)$ は $z=1$ では値をもたないが，任意の $f\in M$ で $Ff\in A$ となり $J=FM$ は A の一つの閉イデアルとなる．なんとなれば $f\in M$ なら $|z|<1$ で F は解析的で，単位円の $z=1$ の点を除いたところで $|F|=1$ であるから $Ff\in A$ は明らか．J が閉イデアルなることは，M が閉イデアルで $z=1$ を除いた単位円で $|F|=1$ となることからいえる．さらに $J\neq M$ なることは，$(1-z)F^{-1}$ は有界ではないので $(1-z)F^{-1}\notin M$，すなわち $1-z\notin FM=J$ となることから明らか．

これらの閉イデアルの例から，もっと一般な形をした閉イデアルを考えることができる．

f.　K を単位円上の Lebesgue 測度 0 の閉集合とし，F をつぎの条件を満たす内部関数，すなわち $|F(z)|\leqq 1$ となる解析関数で単位円の上で $|F(e^{i\theta})|=1(a.e.)$ となるものとする．

（i）　単位開円板での F の 0 点を $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ とするなら，その集積点は K の中にふくまれる．

（ii）　F の特異部分*) からきまる正特異測度の台は K の中にある．そのとき $J=\{Fg : g\in A,\ g(K)=0\}$ は A の（0）でない閉イデアルである．

ディスク環 A の任意の（0）でない閉イデアルは，上の **f.** の形をしている

*) F を定理 5·18 のように分解したときの S を F の特異部分という．定理 5·17 により S に正特異測度が付随する．

ことを主張するのが，これから証明しようとしている Rudin [文献 76)] の定理である．

まず f. の形のものはAの（0）でない閉イデアルであることから証明しよう．

定理 5·19 K, F, J を上のように定義する（例f）．そのときJはAの（0）でない閉イデアルである．

証明 Bを $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$を0点にもつ Blaschke 積（5·1 節D項）とすれば，$F=BS$ と分解できる．ここでSは0点をもたない内部関数である．$|\lambda|=1$ となるような複素数 λ を適当にかけることにより $S(0)>0$ となるから，定理 5·17 より単位円上の正特異測度μで

$$S(z)=\exp\left[-\int\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\mu(\theta)\right]$$

仮定より $\{\alpha_n\}$ の集積点はKの中にあるからBは複素平面上K以外の点では解析的である．またμの台はKにふくまれるからSもK以外の点で解析的となる．もしgをKの上で0となるAの任意の元とすればFが有界なることから $Fg\in A$ である．Jはこのような関数の全体であるからAの一つのイデアルとなるわけであるが，Kが単位円の Lebesgue 測度0となることから$J\neq\{0\}$．つぎにJが閉であることは $J\supset\{Fg_n\}$ である $f\in A$ で $\|Fg_n-f\|_\infty\to 0$ とする．Fは単位円の上で絶対値1 ($a.e.$) であるから $\|g_n-\bar{F}f\|_\infty\to 0$．かくして $\{g_n\}$ は単位円の上で $\bar{F}f$ に一様に収束するから $\bar{F}f=g$ とおけば $g\in A$ となり $f=Fg$ となるからである． qed

さて今度は，任意の閉イデアルは上のような形をもつことを示そう．その前に多少の準備が必要である．

Aの$\{0\}$でない閉イデアルをJとおく．$J\ni f$ の0点の集合を $Z(f)=\{x\in\Gamma : f(x)=0\}$ とし，$K=\bigcap_{f\in J}Z(f)$ とおく（ここでΓは単位円を表わす）．KはΓの Lebesgue 測度0の閉集合となるわけだが，しからばどのような関数がFとなるか．Jのすべての元fがある内部関数Fで $f=Fg$ となるとすれば，当然FはJのおのおのの元fをわらなければならぬ．すなわち f/F が有界解析関数である．その結果FはJの任意の元fの内部部分もわらなければならぬ（定理 5·13）．ゆえにFはこれらの内部部分の最大公約関数となるはずである．

定義　F, G を内部関数とするとき F が G をわるというとは G/F が有界解析関数となるときにいう．F が G をわるとき G/F も内部関数となることは明らか．

定理 5·20　$\mathfrak{F}$ を内部関数の空でない族とする．そのときつぎの性質を満たす唯一つの内部関数 F が存在する．

（i）　F は $\mathfrak{F}$ のおのおのの関数をわる．

（ii）　F_1 を $\mathfrak{F}$ のおのおのの関数をわる任意の内部関数とすれば F_1 は F をわる．

証明　いま F_1, F_2 を内部関数とし $F_1=B_1S_1$, $F_2=B_2S_2$ と分解する（定理5·18）．F_1 が F_2 をわれば明らかに B_1 は B_2 をわる．なんとなれば単位開円板での F_1 の 0 点は F_2 の 0 点になっているからである．それゆえ S_1 は S_2 をわらなければならぬ．

$$\frac{S_2}{S_1}(z)=\exp\left[\int\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}(d\mu_1-d\mu_2)\right]$$

は明らかである．ここで μ_1, μ_2 は S_1, S_2 に対応している正特異測度である．さて S_2/S_1 は有界なるゆえ $\mu_1-\mu_2\leqq 0$ であり，$\mu_2\geqq\mu_1$.

以上のことから内部関数の族 $\mathfrak{F}=\{F_\lambda\}$ があったとき $F_\lambda=B_\lambda S_\lambda$ とすればすべての Blaschke 積 B_λ に共通な 0 点を 0 点とする Blaschke 積 B を作り，また S_λ に対応する正特異測度 μ_λ の下限の測度 μ, すなわち $\mu_\lambda\geqq\mu$ でかつ $\mu_\lambda\geqq\mu'$ なら $\mu\geqq\mu'$ となる測度を作れば，その μ でできる特異関数 S で $F=BS$ が定理の（i），（ii）を満たすものである．$\{\mu_\lambda\}$ の下限 μ の存在はつぎのように定義すればよい．

$$\mu(E)=\inf_P\sum_{j=1}^n\inf_\alpha\mu_\alpha(E_j),$$

ここで P は E を Baire 集合 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ に分割したもので，すべての分割を考える．　　　　qed

定義　このような F を $\mathfrak{F}$ の関数の最大公約関数とよぶことにする．

準備が終わったので Rudin の定理を証明する．

定理 5·21 (Rudin)　J をディスク環 A の $\{0\}$ でない任意の閉イデアルとする．そして $K=\bigcap_{f\in J}Z(f)$, $Z(f)=\{x\in\Gamma : f(x)=0\}$．$F$ を J の 0 でない関数の

内部部分の最大公約関数とする．そのとき $J=\{Fg : g\in kK\}$ となる．ここで Γ は単位円，$kK=\{f\in A,\ f(K)=0\}$ とする．

証明 $f\in J$ に対してその内部部分を f_1，外部部分を f_2 としたとき $g=(f_1/F)\cdot f_2$ とおけば $g\in A$ でKの上で0となる．$\widetilde{J}=\{f/F;\ f\in J\}$ とおけば$\widetilde{J}$ はAの一つの閉イデアルで kK にふくまれる．ここで kK とはKの上で0となるAの関数すべての集合とする．問題は $\widetilde{J}=kK$ を証明することにある．ここですぐわかることは $F=1$ と仮定してこの場合に証明できればよいことである．この場合は $J=kK$ が示されればよい（巻末補遺を見よ）．

さてAの閉イデアルJの中の0でない関数の内部部分の最大公約関数が1と仮定する．このとき $J=kK$ を証明するためにJに直交する単位円周上の複素測度は kK にも直交することを示せばよい .

μをJに直交する有限複素 Baire 測度とする．すなわち

$$\int f d\mu=0 \qquad (f\in J)$$

$f\in J$ を固定したときJはイデアルなるゆえ

$$\int z^n f d\mu=0 \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

ゆえに F. and M. Riesz の定理（定理 5・4）より

$$f d\mu=\frac{1}{2\pi}h_f d\theta$$

ここで関数 $h_f\in H^1$ となることが容易にわかる．$h_f(0)=\frac{1}{2\pi}\int h_f d\theta=\int f d\mu=0$ なるゆえ h_f は原点0で値0をとる．

さて測度μを絶対連続部分と特異部分にわけてつぎのようにおく．

$$d\mu=\frac{1}{2\pi}\phi d\theta+d\mu_s \qquad (\phi\in L^1)$$

そのとき上のことから任意の $f\in J$ で $f d\mu_s=0$ となるがJの関数の0点の共通部分はKなるゆえ μ_s の台はKにふくまれることになる．また $f\in J$ に対して $f\phi=h_f(a.e.\ e^{i\theta})$ となる．もし $f\neq 0$ なら，ほとんどすべての θ で $\phi(e^{i\theta})=\lim_{r\to 1} h_f(re^{i\theta})/f(re^{i\theta})$ となる．すぐわかるように $f\neq 0$, $f\in J$ ならば有理関数 h_f/f は f に無関係にきまる．もっとくわしくいえば f, $g\in J$, $f\neq 0$, $g\neq 0$ な

ら単位円の上で $h_f/f=h_g/g(a.e.\ e^{i\theta})$．それゆえ

$$gh_f-fh_g=0 \qquad (a.e.\ e^{i\theta})$$

しかし $gh_f-fh_g\in H^1$ なるゆえこの関数は単位円板の上では恒等的に0となる．ゆえに上の有理関数を M とおく．

$$M(z)=\frac{h_f(z)}{f(z)}=\frac{h_g(z)}{g(z)}$$

さて J の中の関数の内部部分の最大公約関数が1であると仮定しているゆえ M は解析関数となる．なんとなれば z を単位開円板の中の任意の点としたとき，ある $f\in J$ で $f(z)\neq 0$ となるから $M=h_f/f$ は点 z で解析的となる．

ここで $M\in H^1$ を証明しよう．これは $\lim_{r\to 1} M(re^{i\theta})$ はほとんどいたるところで $\phi(e^{i\theta})$ と一致するからこれが証明できれば $\phi\in H^1$ もいえる．$f_0\neq 0$ となる $f_0\in J$ を選び，$M=h_{f_0}/f_0$ が解析関数なることから

$$M(z)=\lambda B(z)\exp\left[\int\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\rho(\theta)\right]$$

ここで B は Blaschke 積で ρ はつぎで定義された実測度である．

$$d\rho=\frac{1}{2\pi}\log|M|d\theta+d\rho_1-d\rho_2=\frac{1}{2\pi}\log|\phi|d\theta+d\rho_1-d\rho_2$$

ここで ρ_1,ρ_2 は単位円周の上の正特異測度である（定理 5·17, 5·18)．

さて J の任意の元 f に対して $fM\in H^1$．もし μ_f を f の特異部分を表わす測度とすれば $\mu_f\geqq\rho_1$．しかし $f\in J$ の内部部分の最大公約関数が1という仮定より $\rho_1=0$ となる．ゆえに

$$M(z)=\lambda B(z)\exp\left[-\int\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\rho_2\right]\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\log|\phi|d\theta\right]$$

ここで $\phi\in L^1$, $\log|\phi|\in L^1$, ρ_2 は正特異測度である．ゆえに $M\in H^1$，これから $\phi\in H^1$ となる．ここで h_f は原点で0となるから M も原点で0となる．

さて h を K の上で0となる任意の A の関数とすれば

$$\int hd\mu=\frac{1}{2\pi}\int h\phi d\theta+\int hd\mu_s.$$

$\phi\in H^1$ で ϕ は原点で0となるから上の式の右辺の第一項の積分は0となる．また μ_s の台は K の中にあり，h は K の上で0なるゆえ，後の方の積分も0となる．これで証明は完了した． *qed*

系 5・22 ディスク環 A の任意の閉イデアルは A の一つの関数で生成された閉主イデアルである.

証明 (0) イデアルはもちろん主イデアルである. もし J は (0) でなければ上の定理により $J=F\cdot kK$ となる. ここで K は単位円周上の Lebesgue 測度0の閉集合であるから K でちょうど0となる $g\in A$ が存在するから, f を g の外部部分とする. そのとき関数 Ff は J を生成する. qed

注意 ディスク環 A の閉イデアル J が準素イデアル, すなわち J をふくむ極大イデアルがただ一つしか存在しないときは, つぎの形のどちらかになる. (i) J は $(z-\alpha)^k$ で生成される主イデアル (k は正整数, $|\alpha|<1$). (ii) J はつぎの関数 f で生成される主イデアル: $f(z)=(z-\lambda)\exp[\rho\cdot(z+\lambda)/(z-\lambda)]$ ($|\lambda|=1$, $\rho\geqq 0$).
証明は文献⑧, p. 88 を参照のこと.

5・3 シフト作用素

単位円 Γ の上の関数空間 M があったとき, それは $e^{i\theta}$ をかけてもやはり M にふくまれる. すなわち $e^{i\theta}M\subset M$ となるとき一般に M を**シフト不変部分空間** (shift invariant subspace) または単に**不変部分空間**という. いま l^2 を複素数の列 $\{a_n\}$ で, $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2<\infty$ となるもの全体を表わすものとする. また Γ の上の L^2-空間の元 f はその Fourier 級数

$$f(e^{i\theta})\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{in\theta},\quad a_n=\frac{1}{2\pi}\int f(e^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$$

に一意的に展開されるが, ここで $a_n=0$ ($n=-1, -2, \cdots$) で $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2<\infty$ となる $f\in L^2$ の集りが H^2 となるから, H^2 と l^2 は同一視できる. ここで $H^2\ni f$, $f(e^{i\theta})=\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{in\theta}$ に対して $e^{i\theta}f(e^{i\theta})=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}e^{in\theta}$ となる. $H^2\ni f$ に対して $T(f)=e^{i\theta}f$ となる T をシフト作用素ということにすれば

(i) l^2-空間ではシフト作用素 T は

$s=[a_0, a_1, a_2, \cdots]$ に対して $T(s)=[0, a_0, a_1, \cdots]$.

(ii) H^2-空間ではシフト作用素 T は

$$(Tf)(\theta)=e^{i\theta}f(\theta).$$

この不変部分空間の研究は Beurling [文献 77)] により始められ, Lax [文献

78)], Helson-Lowdenslager[文献 89)] などがそれに続いた．それら H^2 や L^2 における不変部分空間のほかに，最近 Hasumi-Srinivasan [文献 80)] による $C(\Gamma)$ (Γ は単位円) の不変部分空間の研究や，有限 Riemann 面上の正則関数の環に対する不変部分空間の研究 (Hasumi [文献 81)]) など，数多い結果が報告されている．しかしここでは，H^2 と L^2 に関する不変部分空間に限って考える．なお，くわしい最近の結果などについては荷見 [文献 82)] を見られたい．

A. H^2 の不変部分空間

つぎの H^2 の不変部分空間に関する定理は Beurling [文献 77)] によって与えられた．

定理 5·23 S を H^2 の (0) でない閉部分空間とする．そのとき S がシフト不変であるための必十条件は $S=FH^2$ となることである．ここで F は一つの内部関数である．

証明 十分性は明らか．必要性：いま S を H^2 の一つのシフト不変部分空間とする．ここで S の中に単位円板の原点で 0 でない関数が存在すると仮定して一般性を失なわない．なんとなれば，もしそうでないとすれば $z=0$ での S のおのおのの関数の零点の最低階数を k とすれば，$S=z^k S_0$ とかけ S_0 はまたシフト不変となるからである．そして $z=0$ で 0 とならない関数をふくむ．さて定数関数 1 の S の上への射影を G とすれば，$1=G+(1-G)$ で $G\in S$ でかつ $1-G\perp S$ である．ここで $G\neq 0$ と仮定できる．なんとなれば $G=0$ となれば $1\perp S$ となり，これは S のすべての関数 f で $f(0)=0$ となることを示す．ところで S の中に $f(0)\neq 0$ となる関数 f が存在することを仮定してあるから 1 は S とは直交しない．さてつぎに $|G|$ は単位円の上で定数であることを示そう．$G\in S$ なるゆえ S のシフト不変から $z^nG\in S(n=1, 2, \cdots)$．$1-G\perp S$ でかつ z^nG は $z=0$ で 0 となるから

$$
\begin{aligned}
0&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\bar{G})Ge^{in\theta}d\theta\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Ge^{in\theta}d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|G|^2e^{in\theta}d\theta\\
&=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\theta}|G|^2d\theta.
\end{aligned}
$$

このことより正測度 $|G|^2d\theta$ は $e^{in\theta}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ と直交することになり，F. and M. Riesz の定理（定理 5・4）より $|G|^2d\theta$ は Lebesgue 測度 $d\theta$ の定数倍となり，結局 $|G|$ は定数となるのである．さてここで $S=GH^2$ なることを証明しよう．$|G|$ は単位円の上で定数で，$G\in S$ なるゆえ $S\supset GH^2$ は明らかであるが，それが等しいことを証明するのに $f\perp GH^2$ となる $f\in S$ は $f=0$ となることを示せばよい．$f\perp GH^2$ ならば $f\perp Gz^n(n=0,1,2,\cdots)$ なるゆえ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\bar{G}e^{-in\theta}d\theta=0 \qquad (n=0,1,2,\cdots).$$

またGの定義より $1-G\perp z^n f$ $(n=1,2,\cdots)$．すなわち $n=1,2,3,\cdots$で

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\bar{G})fe^{in\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}fe^{in\theta}d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\bar{G}e^{in\theta}d\theta=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\bar{G}e^{in\theta}d\theta.$$

ゆえにすべての整数 n で $\int_{-\pi}^{\pi}f\bar{G}e^{in\theta}d\theta=0$ となり，その結果 $f\bar{G}=0(a.e.\,d\theta)$．ところが $|G|$ は0でない定数なるゆえ $f=0$ となる．G に適当な定数をかけて内部関数にしたものをFとすれば $S=FH^2$ となる． qed/

この定理は Dirichlet 環（4・3 節）の場合に拡張できる．A をコンパクト Hausdorff 空間の上の Dirichlet 環とし，Xの上の0でない正測度mが乗法的とする．すなわち任意の $f,g\in A$ で $\int fgdm=\int fdm\cdot\int gdm$ を満たすとする．そのとき $H^2(dm)$ をAの $L^2(dm)$ での閉包と定義すればつぎの定理（文献⑧，p. 102）が成立する．この証明は上の定理と大体同じなので証明はのせない．

定理 5・24 S を $H^2(dm)$ の閉部分空間で A の任意の関数をかけることに関して不変である．すなわち $AS\subset S$ であると仮定する．そして $\int gdm\neq 0$ となるような $g\in S$ が存在するならば，そのとき $H^2(dm)$ の中に $|F|=1(a.e.\,dm)$ のようなFが存在して $S=F\cdot H^2(dm)$ となる．

注意 上の定理で $\int gdm\neq 0$ となる $g\in S$ の存在を仮定したが，つぎにこの仮定がない場合に上の定理が成立しないことを示そう．Xをトーラスとし，αを一つの無理数と

する．Aをそのトーラスの上の連続関数 $f(\theta,\psi)$ で，その Fourier 係数

$$a_{mn}=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta,\psi)e^{-im\theta}e^{-in\psi}d\theta d\psi$$

が $m+n\alpha\geqq 0$ となる格子点 $(m,\ n)$ の半平面の外側で0となるようなもの全体は一つの Dirichlet 環となることはすでに述べた．ここで $dm=(1/4\pi^2)d\theta d\psi$ とすれば $H^2(dm)$ はつぎのような Fourier 級数をもつトーラスの上の L^2-関数全体となる．

$$f(\theta,\psi)\sim\sum_{m+n\alpha\geqq 0}a_{mn}e^{im\theta}e^{in\psi}.$$

ここでSを $a_{00}=0$ となるfのなす部分空間とすれば，$AS\subset S$ となることは明らかであるが $S=F\cdot H^2(dm)$ の形とはならない．

B． L^2 の不変部分空間

つぎに単位円周上の L^2-空間の不変部分空間について考えてみる．

定理 5·25 Sを L^2 の不変部分空間とする．すなわち $zS\subset S$ とする．そのときつぎが成り立つ．

(i) もし $zS=S$ ならばSは単位円周上のある固定された Baire 集合の上で0となるすべての L^2-関数の集合となる．

(ii) もし $zS\neq S$ ならそのとき $S=FH^2$ となる．ここでFは $|F|=1$ となる可測関数である．

証明 (i) $zS=S$ とすればまた $e^{-i\theta}S\subset S$ が成立する．いま定数関数1のSの上への射影をGとすれば $1-G\perp S$ となるから任意の整数 n で $1-G\perp z^nG$ となるから

$$\int e^{in\theta}(1-G)\bar{G}d\theta=\int(1-G)\bar{G}e^{in\theta}d\theta=0.$$

F. and M. Riesz の定理より測度 $(1-G)\bar{G}d\theta=kd\theta$ (kは定数) となるが，上の式で $n=0$ のときも考えれば $k=0$ となり，その結果 $(1-G)\bar{G}=0$ となる．これはGの値が0であるか1であるかを示しているが，ここで $E=\{x;\ G(x)=0\}$ とおけば，Gは $\Gamma-E$ の特性関数 $\chi_{\Gamma-E}$ に等しい（ここでΓは単位円を表わす）．さて $\{e^{in\theta},\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots\}$ で張られた部分空間は L^2 の中で稠密であり，かつ $\chi_{\Gamma-E}=G\in S$ であるから $\chi_{\Gamma-E}\cdot L^2\subset S$ は明らか．そこで等号が証明できればよいわけであるが，それには $\chi_{\Gamma-E}\cdot L^2\perp f,\ f\in S$ なら $f=0$ を証明すればよい．さて $\chi_{\Gamma-E}\cdot L^2\perp f$ からfは $\Gamma-E$ の上で0となることは明らかであるが，一方 $\chi_E=1-G\perp S$ であるから $\chi_E\perp e^{in\theta}f(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$．これからまた $\chi_E f\perp e^{in\theta}(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots)$ でかつ $\{e^{in\theta}\}$ は L^2 を生成する

から $\chi_E f=0$, すなわち f はEの上で0となり，結局 $f=0\,(a.e.)$ となる.

（ii） $zS\neq S$ とする. $zS\subsetneqq S$ となるからNをSの中での zS の直交補部分空間とするとき $N\perp zS$ となり，当然 $N\perp zN$ となる. また $zN\perp z^2S$ となるから$zN\perp z^2N$ となるが，同時に $z^2N\subset z^2S\subset zS$ となることから $N\perp z^2N$ となる. このようにしてSの部分空間の族 $\{z^iN\}$ は互いに直交している. いま $M=\bigcap_{n=1}^{\infty} z^nS$ とおけば

$$S=M\oplus N\oplus zN\oplus z^2N\oplus\cdots$$

さて $f\in N$ とすればfは z^kf $(k=1,2,3,\cdots)$ と直交する. すなわち

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta)|^2e^{ik\theta}d\theta=0 \qquad (k=1,2,3,\cdots)$$

F. and M. Riesz の定理より $|f|$ は単位円の上で定数となる.

さて M は $z^{-1}M\subset M$ を満たすから（i）で証明したように単位円上のある Baire 集合の特異関数 χ で $M=\chi L^2$ となる. $zS\neq S$ なるゆえ N の元 f で0でないものが存存するが，z^kf は χ と直交するゆえ

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{ik\theta}f(\theta)\chi(\theta)d\theta=0 \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

それゆえ $f\chi\in H^2$ となるが $\chi\neq 1$ であるゆえ $f\chi$ はある正の測度の集合の上で0となる. しかし $f\chi\in H^2$ なるゆえ $f\chi=0(a.e.)$ でなければならぬ. ところで $|f|$ は0でない定数であった. それゆえ $\chi=0$ となり，$M=(0)$ となる. その結果

$$S=N\oplus zN\oplus z^2N\oplus\cdots.$$

ここでNは一次元空間なることを示す. もし $f,\ g\in N$ が $f\perp g$ となったとすれば $f\perp z^kg$ $(k\geqq 0)$, かつ $z^kf\perp g$ $(k\geqq 0)$ なるゆえ $f\bar{g}=0$ となり，$|f|,|g|$ が共に定数となることから $f\equiv 0$ または $g\equiv 0$ となる. これはNが一次元空間となることをいっている. そうするとSは $|F|=1$ となる $F\in N$ で

$$S=\{a_0F+a_1zF+a_2z^2F+\cdots,\ \sum|a_n|^2<+\infty\}$$

となることがわかり，$S=FH^2$ となる. *qed*

第 6 章　*-環概論

この章では対合(involution)をもつ環（*-環）について論ずる．*-環は，最近盛んに研究がなされている作用素環（von Neumann 環，W^*-環）や AW^*-環をふくんでいるが，ここではこれらの環には触れない．6·1 節では *-環の一般的な性質が述べられる．6·2節では可換 *-環が B^*-条件をみたせば $C_0(M_A)$ と等長 *-同型となることを示す．6·3，6·4 節では *-環の *-表現について述べる．とくに Hilbert 空間における *-表現を考える．6·5 節では対称 *-環の性質をあげる．6·6 節では B^*-環の性質について述べ，任意の複素 B^*-環は 1 つの C^*-環と等長的 *-同型なることを証明する．最後に 6·7 節では作用素からなる環のいくつかの例をあげる．

6·1　*-環の定義と初歩的性質

A．定　　義

A を複素環とする．A の任意の元 x に対して A の元 x^* を対応させる写像 $x \to x^*$ がつぎの条件を満たすとする．

（i）　$(x^*)^* = x$.

（ii）　複素数 α, β に対して $(\alpha x + \beta y)^* = \bar{\alpha} x^* + \bar{\beta} y^*$.

（iii）　$(xy)^* = y^* x^*$.

この写像を対合（involution）という．

Aが実環のときは，（ii）の代わりにつぎの（ii)′ をおくものとする．

（ii)′　実数 α，β に対して $(\alpha x + \beta y)^* = \alpha x^* + \beta y^*$.

対合をもつ環を *-環とよぶ．

*-環の例をつぎに述べる．

例 1　環 $C(X)$ (1·1 節B項例 1)．$C(X) \ni f$ に対して $f^* = \bar{f}$ ($\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$: $f(x)$ の共役複素数) を対応させることにより *-環となる．

例 2　環 $\mathfrak{B}(H)$: 1·1 節B項例 2 のXを Hilbert 空間Hにおき代えたもの．$\mathfrak{B}(H) \ni T$ に対して，T の随伴作用素を T^* とすれば $\mathfrak{B}(H)$ は *-環となる．

例 3　環 l^1 (1·1 節B項例 4)．$l^1 \ni x = \{x_n\}$ に対して，$x^* = \{x_n'\}$ ($x_n' = \bar{x}_{-n}$)

とおけば，$x \to x^*$ は l^1 の対合となる．

*-環 A において $x^*=x$ となる x を **Hermite 元**，$x^*=x$ となるベキ等元 x を**射影元**という．また $xx^*=x^*x$ となる元 x は**正規** (normal) といわれる．A の部分集合 E が**正規**であるとは，$E \cup E^*$ の任意の二つの元が可換であることである．ここで $E^*=\{x^* : x \in E\}$ である．

a． $x+x^*$, xx^*, 0, 単位元は Hermite 元である．またすべての Hermite 元は正規である．

b． A が複素 *-環のとき，A のすべての元 x は $x=h+ik$ で h, k が Hermite 元と表わされる．またこのような表わし方は一意である．ここで h, k はおのおの

$$h=\frac{1}{2}(x+x^*), \qquad k=\frac{1}{2i}(x-x^*)$$

となる．この h, k を x の **Hermite 成分**という．

c． A を単位元をもたない複素 *-環とし，それに単位元を添加したものを A_1 とする (1·1 節C項)．A_1 の任意の元を (x, α) としたとき $(x, \alpha)^*=(x^*, \bar{\alpha})$ と定義すれば $(x, \alpha) \to (x, \alpha)^*$ は A_1 の対合となる．

d． A を実 *-環としたとき，その複素環拡大 A_C(1·1 節D項) の元 (x, y) に対して $(x, y)^*=(x^*, -y^*)$ と定義すれば $(x, y) \to (x, y)^*$ は A_C の対合となる．

定義 A を *-環としたとき，A の部分環 B は $B^*=\{x^* : x \in B\}=B$ のとき ***-部分環**といわれる．また I を A の左 (右) イデアルとし，$I^*=I$ なら必然的に I は両側イデアルとなるが，そのような I を ***-イデアル**とよぶ．A, B を二つの *-環とし，A から B の中への準同型写像を $a \to a'$ としたとき，A の任意の元 a で $(a^*)'=(a')^*$ ならばそれを ***-準同型**という．同様にして ***-同型写像**も定義される．

e． A から B への *-準同型写像での，A の像は B の *-部分環となり，その核は A の *-イデアルである．

f． I を A の *-イデアルとして環 A/I を考える．$x'=x+I$ とおけば $x \to x'$ は A から A/I の上への準同型写像であるが，$(x')^*=(x^*)'$ と定義すれば $x' \to (x')^*$ は A/I の対合となり A/I は *-環となる．$x \to x'$ は A から A/I の

上への *-準同型写像である．

定義 Aをノルム *-環とし，対合 $x \to x^*$ の連続性を考える．$x \to x^*$ が等長的 (isometric)，すなわち $\|x^*\| = \|x\| (x \in A)$ となるときAを ***-ノルム環**という．つぎに Banach *-環Aが $\|x^*x\| = \|x\|^2 (x \in A)$ を満たすとき $\boldsymbol{B^*}$**-環**と呼ばれる．$\|x^*x\| \leqq \|x^*\|\,\|x\|$ であるから，B^*-環は *-ノルム環 ($\|x^*\| = \|x\|$) となる．また Banach *-環Aがそれ自身のノルム $\|x\|$ 以外に二番目のノルム $|x|$ で，$|xy| \leqq |x|\,|y|$ とB条件 $|x|^2 = |x^*x|$ を満たすものが存在するときAを $\boldsymbol{A^*}$**-環** という．

つぎに B^*-環の例を考える．

例． $\mathfrak{B}$ を $\mathfrak{B}(H)$ の閉自己随伴部分環とする．すなわち $T \in \mathfrak{B}$ に対して $T^* \in \mathfrak{B}$ とする．$T \in \mathfrak{B}$, $x \in H$ に対して

$$\|Tx\|^2 = (Tx,\ Tx) = (T^*Tx,\ x) \leqq \|T^*T\|\,\|x\|^2$$

なるゆえ $\|T\|^2 \leqq \|T^*T\| \leqq \|T^*\|\,\|T\|$．その結果 $\|T\| \leqq \|T^*\|$ となるが，対称性より $\|T^*\| = \|T\|$．さらに上式より，$\|T^*T\| = \|T\|^2$ となる．このような形の B^*-環を $\boldsymbol{C^*}$**-環**とよぶ．後で示されるように実は任意の複素 B^*-環は１つの C^*-環と等長 *-同型となるのである．

B．*-環の初歩的性質

A を単位元をもつ *-環としたとき，A の元 r が左（右）正則なるための必十条件は r^* が右（左）正則なることである．それゆえ対合は正則元全体の群Gの上の逆自己同型写像 (anti-automorphism) となる．そして $G^* = G$ であり $G \ni r$ で $(r^*)^{-1} = (r^{-1})^*$ である．Aの元xで $x^*x (xx^*)$ が正則ならばxは左（右）正則なるゆえ，$x \in G$ となる必十条件は x^*x, xx^* が共にGに入ることである．擬正則の場合も $(G^q)^* = G^q$, もし $r \in G^q$ なら $(r^*)^\circ = (r^\circ)^*$ となる．

定理 6·1 Aを *-環とすれば，任意の $x \in A$ で $\sigma_A(x^*) = \overline{\sigma_A(x)} = \{\bar{\xi} : \xi \in \sigma_A(x)\}$．もし$A$が実 *-環なら $\sigma_A(x^*) = \sigma_A(x)$．

証明 $(\xi^{-1}x)^* = \bar{\xi}^{-1}x^*$ なるゆえ前半は明らか．後半は実環のスペクトルの定義 (1·3 節) よりわかる (系 1·21)． qed

系 6·2 Aを Banach *-環とすれば，Aの元xに対して $r_A(x^*) = r_A(x)$ となる．

Eを *-環 A の正規集合とする．すなわち $E\cup E^*$ の任意の二つの元は可換であるとする．Zorn の補題により E を含む A の極大正規部分集合が存在する．

定理 6·3 ノルム *-環Aの極大正規部分集合BはAの閉極大可換 *-部分環で，すべての $x\in B$ で，$\sigma_B(x)=\sigma_A(x)$.

証明 EをAの正規部分集合ならば $E\cup E^*$ がまた正規部分集合．Bは極大なるゆえ $B^*=B$ となる．一つの元 x が B に属することを証明するためには（1） xは正規である．（2） xはBの任意の元と可換であることを示せばよい．なんとなればもしそうなら $x\cup B$ も正規となり，Bの極大性から$x\in B$ となる．このことからBが部分環なることがわかり，その結果Bは極大可換*-部分環となる．またAが単位元をもてばそれはBにふくまれる．Bが閉なることを証明するのに $\{a_n\}\subset B$ なる点列がxに収束すると仮定する．a_n はBのすべての元と可換なるゆえxもそうであり，またBは *-部分環なるゆえ x^* はBのおのおのの元と可換であり，当然 $a_nx^*=x^*a_n$ となる．その極限として $xx^*=x^*x$ となり $x\in B$ である．これは B が閉集合なることを示す．最後に $x\in B$ をAの擬正則元とすれば，xは正規なるゆえその擬逆元 x° も正規である．また x° はxに可換なAのすべての元と可換なるゆえ，B の元と可換となり $x^\circ\in B$. スペクトルの定義から $\sigma_B(x)=\sigma_A(x)$ は明らか． *qed*

定義 Banach *-環の対合が **Hermite 的**であるとは，すべての Hermite 元が実スペクトルをもつときである．

定理 6·4 Banach *-環の対合が Hermite 的であるための必十条件は，任意の Hermite 元hで，$-h^2$ はすべて擬正則となることである．

証明 対合が Hermite 的であれば $\sigma(h^2)$ は負ではない．なんとなれば定理 1·23 より $\sigma(h^2)=\{\sigma(h)\}^2=\{\xi^2;\xi\in\sigma(h)\}\geqq 0$ となるからである．ゆえに当然 $\sigma(h^2)\not\ni -1$ であるから $-h^2$ は擬正則となる．逆にhを Hermite 元とし，そのスペクトルが複素数 $\alpha+\beta i(\beta\neq 0)$ をふくんだとする．そのとき

$$h_1=\beta^{-1}(\alpha^2+\beta^2)^{-1}\{\alpha h^2+(\beta^2-\alpha^2)h\}$$

とおけば h_1 は Hermite 元である．定理 1·23 より $\sigma(h_1)=\beta^{-1}(\alpha^2+\beta^2)^{-1}\cdot\{\alpha\sigma(h)^2+(\beta^2-\alpha^2)\sigma(h)\}$ であるから $\sigma(h)$ のところへ $\alpha+\beta i$ を代入して見れば，$\sigma(h_1)$ は i をふくむことがわかる．ゆえに $\sigma(h_1{}^2)\ni i^2=-1$，すなわち $-h_1{}^2$ は擬非正則となる． *qed*

定理 6·5 A を Hermite 対合をもつ Banach *-環とするとき $S^q=Z^q\cup(Z^q)^*$(1·2 節). もしAが単位元をもてば $S=Z\cup Z^*$ となる.

証明 まず S^q にふくまれる Hermite 元 h を考える. そのとき $h\circ h\in S^q$ は明らか. A が実環のときに考えると, 対合が Hermite 的なるゆえ $\sigma(h)$ は実数からなる. それゆえ定理 1·20 より $\alpha_n=1+n^{-1}i$ に対して $|\alpha_n|^{-2}(2h-h^2)$ $(n=1,2,\cdots)$ は擬正則である. さらに

$$|\alpha_n|^{-2}(2h-h^2)=\frac{n^2}{n^2+1}(h\circ h).$$

ゆえに $\lim_{n\to\infty}|\alpha_n|^{-2}(2h-h^2)=h\circ h$ で, その結果 1·2 節D項 f より $h\circ h\in Z^q$ となりこれから $h\in Z^q$ が出る*).

さて x を S^q の任意の元とすれば, $x\circ x^*$, $x^*\circ x$ は S^q に属する. この元は Hermite 元なるゆえ上のことから $x\circ x^*$, $x^*\circ x\in Z^q$. どちらの場合も $x\in Z^q$ か $x^*\in Z^q$ である. 複素環の場合も証明できる. *qed*

定理 6·6 Aを Hermite 対合をもつ Banach *-環とする. BをAの閉 *-部分環とすれば, $x\in B$, $x^\circ\in A$ から $x^\circ\in B$ が出る.

証明 Aの対合が Hermite 的なるゆえ, A の Hermite 元が実スペクトルをもつ. すなわち $\sigma(h)$ は実軸にふくまれる. ゆえに定理 1·26 よりその対合はBでも Hermite 的である. 前の定理より x が Bの擬非正則元なら $1-x$ または $1-x^*$ はBの位相的零因子となり, もちろんまた A の位相的零因子である. これは x はAで擬非正則なることを示している. *qed*

系 6·7 上の定理と同じ仮定のもとで, $x\in B$ に対して $\sigma_A(x)\cup(0)=\sigma_B(x)\cup(0)$. もし$B$が$A$の単位元をふくめば $\sigma_A(x)=\sigma_B(x)$.

これから後, A^*-環について考える. その環についての性質はあとでの Hilbert 空間における *-表現論のところで必要となる. Banach*-環が A^*-環とは, それ自身のノルム $\|x\|$ のほかにもう一つ B^*-条件 : $|x^*x|=|x|^2$ (このノルムは完備とは限らない) をみたすノルム $|x|$ が存在することであった.

定理 6·8 Aを B^*-環とし単位元をもたないとする. そのとき Aを B^*-部分環として等長的にふくむ, 単位元をもつ B^*-環Bが存在する.

証明 Aのそれ自身における左正則表現を $a\to A_a$ とする. $\mathfrak{B}(A)$ の元と見

*) $a\circ b\in Z^q$ なら $a\in Z^q$ または $b\in Z^q$ となることが容易に証明できる.

ての A_a ノルムを $||A_a||$ としたとき $||A_a||\leqq||a||$ は明らか．他方 B^*-条件を用いて

$$||a||^2=||aa^*||=||A_a a^*||\leqq||A_a||\,||a^*||=||A_a||\,||a||.$$

ゆえに $||a||\leqq||A_a||$ となり，その結果 $||A_a||=||a||$ である．これから $a\to A_a$ は A から $\mathfrak{B}(A)$ の中への等長同型写像となるわけであるが，ここで環 B として単位作用素 I と A の $\mathfrak{B}(A)$ の中への像とによって生成された $\mathfrak{B}(A)$ の部分環とする．Bは $A_a+\alpha I$（αはスカラー，$a\in A$）の形の作用素全体からなることは明らか．もし $(A_a+\alpha I)^*=A_{a^*}+\bar{\alpha}I$ と定義すれば $A_a+\alpha I\to(A_a+\alpha I)^*$ はBの中の対合で $a\to A_a$ はAからBへの *-同型写像である．このことからBはAを *-部分環として等長的に含むと考えられる．ここでBが B^*-環なることは $T=A_a+\alpha I$ とすれば

$$||Tx||^2=||ax+\alpha x||^2=||(ax+\alpha x)^*(ax+\alpha x)||$$
$$=||x^*(T^*Tx)||\leqq||T^*T||\,||x||^2.$$

それゆえ $||T||^2\leqq||T^*T||\leqq||T^*||\,||T||$ で $||T||\leqq||T^*||$．これから $||T||=||T^*||$ で $||T^*T||=||T||^2$ となる． *qed*

定理 6·9 Aをノルム $||x||$ をもつ A^*-環で，$|x|$ は B^*-条件を満たす他のノルムとする．そのとき任意の Hermite 元 h に対して $|h|\leqq r_A(h)$ で，かつすべての $x\in A$ で $|x|^2\leqq r_A(x^*x)$.

証明 hを Hermite 元とすれば $|h^{2^{m-1}}|^2=|h^{2^m}|$．これをくりかえすことにより，すべての m で $|h|^{2^m}=|h^{2^m}|$ となる．$r_0(x)=\lim|x^n|^{1/n}$ とおけば $|h|=r_0(h)$ となり．定理 1·19（i）および（ii）より $r_0(h)\leqq r_A(h)$ となることから $|h|\leqq r_A(h)$ となる．つぎに任意の $x\in A$ で $h=xx^*$ とおけば上のことから，$|x|^2=|x^*x|\leqq r_A(x^*x)$. *qed*

定理 6·10 A^*-環の対合は両方のノルム $||x||, |x|$ に関して連続である．また $|x|\leqq\alpha||x||$（$x\in A$，α は定数）.

証明 前にもふれたように $|x|$ の B^*-条件から $|x^*|=|x|$．またノルム $||x||$ に関しては $x\to x^*$ を実 Banach 空間からそれ自身への線型写像と考えれば，その写像の連続性を示すために閉グラフ定理（1·1 節A項b）から $||x_n-a||\to 0$, $||x_n{}^*-b||\to 0$ なら $b=a^*$ なることを証明すればよい．$|b-a^*|\leqq|b-x_n{}^*|+|x_n{}^*-a^*|$．また上の定理より $|x|^2=|x^*x|\leq r_A(x^*x)\leqq||x^*||\,||x||$．これより

$$|b-x_n{}^*|^2 \leqq ||b-x_n{}^*||\ ||b^*-x_n||$$

$$|x_n{}^*-a^*|^2 \leqq ||x_n{}^*-a^*||\ ||x_n-a||.$$

これから $|b-x_n{}^*| \to 0$, $|x_n{}^*-a^*| \to 0$ となり $b=a^*$. 後の部分は $|x|^2 \leqq ||x^*|| \cdot ||x|| \leqq \beta ||x||^2$ となるから明らか $(\alpha=\beta^{1/2})$. *qed*

定理 6·11 A を A^*-環としそのノルムを $||x||$ とする. $|x|$ を B^*-条件を満たす, Aの別のノルムとする. さてBをAの *-部分環とし, ノルム $||x||_1$ でBは Banach 環となると仮定する. そのとき定数 β が存在してBのすべての元 x に対して $||x|| \leqq \beta ||x||_1$. すなわち$B$から$A$の中への恒等写像は連続となる.

証明 前の定理よりAのすべての元 x に対して, $|x| \leqq \alpha ||x||$. さらにB自身も A^*-環であるから同様にして, すべてのBの元 x で $|x| \leqq \alpha' ||x||_1$ となる. いまBからAの中へ恒等写像が連続なることを証明するのに閉グラフ定理を用いる. $\{x_n\}$ をBの中の点列とし $||x_n-b||_1 \to 0$, $||x_n-a|| \to 0$, $b \in B$, $a \in A$ なら $b=a$ をいえばよい.

$$|a-b| \leqq |a-x_n|+|x_n-b| \leqq \alpha ||a-x_n||+\alpha' ||x_n-b||_1.$$

$||a-x_n|| \to 0$, $||x_n-b||_1 \to 0$ から $a=b$ となる. *qed*

注意 上の定理から任意の A^*-環 A の完備なノルム位相は一意にきまることがでるが, ノルム位相の一意性はすでに (2·6 節) において任意の半単純環で証明してある (つぎの定理から A^*-環は半単純). A^*-環は Rihart 〔14)〕により導入された.

つぎの定理はすべての A^*-環が半単純環なることを示している.

定理 6·12 A^*-環の *-部分環はすべて半単純である.

証明 定理6·9よりAの任意の元 x に対して $|x|^2 \leqq r_A(x^*x)$. BをAの *-部分環としてその根基を R_0 とする. もし $x \in R_0$ なら $x^*x \in R_0$ となり, Bはノルム環なることから x^*x は位相的巾零元となる (定理 2·17), すなわち $r_A(x^*x)=0$ である. これから $|x|=0$ で結局 $R_0=(0)$ となりBは半単純である. *qed*

つぎの定理は定理 6·11 の拡張になっている.

定理 6·13 $\varphi: x \to x'$ を Banach 環Bから A^*-環Aへの準同型写像とする. もし $\varphi(B)$ がAの *-部分環ならば, φ は連続となる.

証明 $\varphi(B)$ はAの *-部分環なるゆえ, 上の定理より半単純となる. ゆえに系 2·42 からφの核は閉イデアルKとなり B/K は Banach 環. ゆえに B/K から $\varphi(B)$ への同型写像は定理 6·11 より連続: $B \ni x$, $B/K \ni \dot{x}$ で $||\varphi(x)|| \leqq$

$\beta\|\dot{x}\|$. また $\|\dot{x}\|\leqq\|x\|$ より $\|\varphi(x)\|\leqq\beta\|x\|$. これは φ の連続性を示す. qed

6・2 可　換 *-環

A を複素可換 Banach 環とし, $x\to x^*$ を A の対合とする. A の極大イデアル空間 M_A の任意の元 φ に対して

$$\hat{x}(\varphi^*)=\overline{\hat{x}^*(\varphi)}\quad(x\in A)$$

で φ^* を定義する. そのとき $\varphi^*\in M_A$ は明らか. $\varphi\to\varphi^*$ は M_A から M_A への同相写像なることも明らかである.

さてその同相写像 $\varphi\to\varphi^*$ の不動点の全体, すなわち $\varphi=\varphi^*$ となる φ の全体を $M_A{}^*(\subset M_A)$ で表わす. もちろんこれは M_A の中で閉集合をなすが, $\varphi\in M_A{}^*$ となる必十条件は A のすべての Hermite 元 h で $\hat{h}(\varphi)$ が実数となることである. なんとなれば A の任意の元 x は Hermite 元 h, k で $x=h+ik$ とかけるからである. それゆえ $M_A{}^*=M_A$ となる必十条件は A の対合が Hermite 的であることであり, またいいかえれば Hermite 元 h では $\hat{h}^2$ は M_A の上で値 -1 を取ることができないことである (定理 3・4, 6・4).

定理 6・14 可換 Banach *-環 A の対合 $x\to x^*$ が Hermite 的であるための必十条件は A の任意の元 x で $r(x^*x)=r(x)^2$ となることである.

証明 対合が Hermite 的ならば, $\hat{x}^*(\varphi)=\overline{\hat{x}(\varphi)}$ となり, $(\widehat{x^*x})(\varphi)=|\hat{x}(\varphi)|^2$. 定理 3・5 (i) より $r(x^*x)=r(x)^2$ となる. つぎに A の任意の元 x で $r(x^*x)=r(x)^2$ となることから, 対合の Hermite 性を証明する. もし対合が Hermite 的でないとする. そのときある Hermite 元 h と $\varphi_0\in M_A$ で, $\hat{h}(\varphi_0)=\alpha+\beta i$ (α, β は実数, $\beta\neq0$) となる. $\mu=\beta^{-1}\alpha$ とおき $a=\beta^{-1}h$ とすれば, a は Hermite 元で $\hat{a}(\varphi_0)=\mu+i$. A の元 e を適当に選んで $\hat{e}(\varphi_0)=1$ とし

$$b=(a-\mu+ni)^m e\qquad(m,\ n：\text{正整数})$$

とおけば $b^*=(a-\mu-ni)^m e^*$, $\hat{b}^*b=[(a-\mu)^2+n^2]^m e^*e$ となり

$$\hat{b}(\varphi_0)=i^m(1+n)^m,\quad \hat{b}^*(\varphi_0{}^*)=(-i)^m(1+n)^m.$$

これは $(1+n)^m\leq r(b)$, $(1+n)^m\leq r(b^*)$ をみちびき

$$\begin{aligned}(1+n)^{2m}&\leq r(b)r(b^*)=r(b^*b)\qquad(r(b^*)=r(b),\ \text{系 } 6\cdot2)\\&=r([(a-\mu)^2+n^2]^m e^*e)\leq([r(a)+|\mu|]^2+n^2)^m r(e^*e).\end{aligned}$$

それゆえ

$$(1+n)^2 \leq ([r(a)+|\mu|]^2+n^2)(r(e^*e))^{1/m}.$$

$m\to\infty$ とすれば $(1+n)^2 \leqq [r(a)+|\mu|]^2+n^2$，すなわち $1+2n \leq [r(a)+|\mu|]^2$ となり，n は任意なるゆえ不合理．　*qed*

さて T を局所コンパクト Hausdorff 空間とし $C_0(T)$ を T の上の無限遠点で 0 となる複素連続関数の全体の環とし，その対合 $f\to f^*$ を $f^*(x)=\overline{f(x)}$ で定義すれば，$C_0(T)$ は複素可換 Banach *-環となる．ノルム $\|f\|$ は $\|f\|=\sup\{|f(x)| : x\in T\}$ なるゆえもちろん B^*-条件 $\|f^*f\|=\|f\|^2 (=\|f^*\|\cdot\|f\|)$ を満たす．**弱い意味の B^*-条件**とは A の任意の元 x で $\|x^*\|\,\|x\| \leq \alpha\|x^*x\|$（$\alpha$ は x に無関係な定数）なることをいう．つぎは弱い意味の B^*-条件を満たす複素可換 Banach *-環は $C_0(M_A)$ と同相同型になることを示す (Gelfand and Naĭmark［文献 83)]).

定理 6·15　弱い意味の B^*-条件を満たす任意の複素可換 Banach *-環 A に対して，写像 $x\to\hat{x}$ は A から $C_0(M_A)$ の上への同相 *-同型写像である．A が B^*-条件を満たせば，A は B^*-環で $x\to\hat{x}$ は等長的 *-同型写像となる．

証明　任意の正整数 n で $\|x^{*n}\|\,\|x^n\| \leqq \alpha\|x^{*n}x^n\| = \alpha\|(x^*x)^n\|$ なるゆえ両辺の n 乗根をとり $n\to\infty$ とすれば，$r(x^*)r(x) \leq r(x^*x)$ となる．つねに $r(x^*x) \leq r(x^*)r(x)$，$r(x^*)=r(x)$（系 6·2）は満たされるから $r(x^*x)=r(x)^2$ となる．前の定理より $x\to x^*$ は Hermite 的，すなわち $\hat{x}^*(\varphi)=\overline{\hat{x}(\varphi)}$ ($\varphi\in M_A$, $x\in A$) となる．これは写像 $x\to\hat{x}$ が A から $C_0(M_A)$ の中への *-準同型写像になっていることを示す．また関数の系 $\hat{A}=\{\hat{x}\,;\,x\in A\}$ は M_A の点を強い意味で分離していることは明らかなるゆえ，Stone-Weierstrass の定理（定理 3·19）より $\hat{A}$ は $C_0(M_A)$ の中で稠密となる．もし h を A の任意の Hermite 元とすれば，弱い意味の B^*-条件をくりかえし使うことにより $\|h\| \leqq \alpha^{(2^n-1)/2^n}\|h^{2^n}\|^{1/2^n} (n=1,2,\cdots)$．$n\to\infty$ とすれば $\|h\| \leqq \alpha r(h)$ をうる．それゆえ

$$\|x^*\|\,\|x\| \leqq \alpha\|x^*x\| \leqq \alpha^2 r(x)^2 \leqq \alpha^2\|x\|^2.$$

そしてそれより $\|x^*\| \leqq \alpha^2\|x\|$ となる．x と x^* とをおきかえることにより $\|x\| \leqq \alpha^2\|x^*\|$ となり $\|x\|^2 \leqq \alpha^2\|x^*\|\,\|x\| \leq \alpha^4 r(x)^2$ から $\|x\| \leqq \alpha^2 r(x) \leqq \alpha^2\|x\|$．これは $r(x)$ が $\|x\|$ と同値である A の 1 つのノルムであることを示している．$r(x)=\sup\{|\hat{x}(\varphi)| : \varphi\in M_A\}$ であるから $x\to\hat{x}$ は A から $C_0(M_A)$ の中への同相写像となる．さて A は完備で $x\to\hat{x}$ による A の像 $\hat{A}$ は $C_0(M_A)$ の

中で稠密であるから $\hat{A}=C_0(M_A)$. また $\alpha=1$ (すなわち B^*-条件) なら $\|x\|=r(x)$ となり $x\to\hat{x}$ は等長写像となる. qed

注意 上の定理から複素可換 B^*-環は, 局所コンパクト空間 M_A で, $C_0(M_A)$ と等長 *-同型になる. そして $C_0(M_A)$ の任意の閉イデアル I は, $h(I)=\bigcap_{f\in I} Z(f)$ $(Z(f)=\{x\in M_A : f(x)=0\})$ の上で 0 となる $C_0(M_A)$ の関数全体となる. このことから複素可換 B^*-環の任意の閉イデアルを I としたとき, I は *-イデアルで $I=k(h(I))$ となり, かつ A/I は $C_0(h(I))$ に等長 *-同型となる.

6・3 *-環の *-表現

この節では *-環の *-表現について考えるが, 任意の *-ノルム環 A は, あるノルム空間 X における *-表現をもち, それにより A は $\mathfrak{B}(X)$ の中に同相にうめこまれることが示される. まず順々に定義をしていく.

定義 a 複素線型空間 X はつぎの条件を満たす $X\times X$ で定義された複素値関数 (x,y) をもつとき, **自己共役**といわれる.

(i) すべての y で $(x,y)=0$ なら $x=0$.

(ii) 任意の y で (x,y) は x に関して線型, すなわち $(\lambda x_1+\mu x_2, y)=\lambda(x_1, y)+\mu(x_2, y)$.

(iii) すべての x, y で $\overline{(x,y)}=(y,x)$.

X がノルム空間のとき (x,y) がさらにつぎの条件を満たすことを仮定する.

(iv) 定数 α が存在してすべての x, y で $|(x,y)|\leqq\alpha\|x\|\,\|y\|$.

この関数 (x, y) を X の**スカラー積**という. 条件 (iv) は (x, y) が $X\times X$ で連続であることを示す. X が Banach 空間であれば (x,y) は, x, y で別々に連続, すなわち y を固定したときに x で連続, かつ x を固定したとき y で連続であれば (iv) は満たされる (1・1 節A項 i). 条件 (iii) から (x,x) は実数となるわけだが, すべての $x\in X$ に対して $(x, x)\geqq 0$ となるときスカラー積 (x, y) は**正値**であるという. このときは Cauchy-Schwarz の不等式 $|(x, y)|^2\leqq(x, x)(y, y)$ が成立する. またこの式と (i) より (x, y) が正値であれば, 任意の $x\neq 0$ で $(x,x)>0$ となる. この場合 (x, y) は普通の意味の内積となり, X は pre-Hilbert 空間となる.

しばらくの間, スカラー積 (x, y) が (i) を必ずしも満たさなくてもいい

とし，つぎのようにおく．

$$M=\{x\in X : \forall y\in X \text{ で } (x, y)=0\}.$$

そのとき M は X の線型部分空間で，X がノルム空間のとき M は閉部分空間である．さて $X'=X/M$ の二つの元 x', y' に対して

$$(x', y')=(x, y)$$

と定義すれば (x', y') は X' の上のスカラー積となり，(i) も満たす．なんとなればすべての $y'\in X'$ で $(x', y')=0$ なら，すべての $y\in X$ で $(x, y)=0$ となり $x\in M$. これは $x'=0$ なることを示す．またもし X がノルム空間なら X/M の上のスカラー積 (x', y') は (iv) も満たすことになる．なんとなれば任意の $a, b\in M$ で $(x', y')=(x+a, y+b)$ なるゆえ

$$|(x', y')|=|(x+a, y+b)|\leqq\alpha\|x+a\|\,\|y+b\|.$$

X' では x' のノルム $\|x'\|$ は $\|x'\|=\inf\{\|x+a\|, a\in M\}$ なることから $|(x', y')|\leqq\alpha\|x'\|\,\|y'\|$ をうるからである．

定義 b T を（ノルム）自己共役空間 X の上の（有界）線型作用素とする．そのとき X の上の（有界）線型作用素 T^* が存在して

$$(Tx, y)=(x, T^*y), \quad (x, y\in X)$$

となれば，このような T^* を T の**随伴作用素** (adjoint) という．スカラー積の定義 (i) より，もし T^* が存在すればそれは一意にきまる．さらに T^* が存在すれば $(T^*)^*$ も存在して T に一致することも明らかである．T^* が存在するような T の全体は X の上の線型作用素からなる1つの環をなす．ここで $T\to T^*$ はその対合と見ることができる．X が内積 (x, y) をもつ Hilbert 空間のときは X の上の有界線型作用素の全体の環 $\mathfrak{B}(X)$ では，すべての $T\in\mathfrak{B}(X)$ に対して T^* が存在することはすでに述べた．つぎに表現についての定義にうつる．

定義 c A を（ノルム）*-環とし X を（ノルム）自己共役空間とする．そのとき A の X に関する（ノルム）表現 $a\to T_a$ が ***-表現** (*-representation) といわれるのは，すべての $a\in A$ に対して $T_a{}^*$ が存在してそれが T_{a^*} と一致するときである．

後のために *-表現の直和を定義する．いま $\{X_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ をノルム自己共役空間の族とし，おのおのの X_λ のスカラー積 $(x_\lambda, y_\lambda)_\lambda$ はつぎの意味で有界と

する．すなわち λ に無関係な α が存在して，$X_\lambda \ni x_\lambda,\ y_\lambda$ に対して

$$|(x_\lambda,\ y_\lambda)_\lambda| \leqq \alpha \|x_\lambda\|_\lambda \|y_\lambda\|_\lambda.$$

ここで $\|\ \ \|_\lambda$ は X_λ のノルムを表わす．$\sum X_\lambda$ を Λ の上で定義されたベクトル値関数 f で，すべての λ で $f(\lambda) \in X_\lambda$ となり

$$\|f\| = (\sum_{\lambda \in \Lambda} \|f(\lambda)\|_\lambda^2)^{1/2} < \infty$$

となるものの全体とする．また $\sum X_\lambda \ni f, g$ とスカラー β で

$$(\beta f)(\lambda) = \beta f(\lambda), \quad (f+g)(\lambda) = f(\lambda) + g(\lambda)$$

と定義する．$\|\beta f\| = |\beta|\ \|f\|$, $\|f+g\| \leqq \|f\| + \|g\|$ は明らかであり，$\sum X_\lambda$ はノルム空間となる．もし X_λ がすべて Banach 空間なら $\sum X_\lambda$ も Banach 空間となることは明らか．つぎに

$$(f,\ g) = \sum (f(\lambda),\ g(\lambda))_\lambda$$

とおけば $|(f,\ g)| \leqq \alpha \|f\|\ \|g\|$ となり，$\sum X_\lambda$ はこのスカラー積 (f, g) をもつノルム自己共役空間となる．

さて *-表現の直和を考えるために，$a \to T_a^{(\lambda)}$ を *-環 A の X_λ における *-表現とする．$f \in \sum X_\lambda$ に関して

$$(T_a f)(\lambda) = T_a^{(\lambda)} f(\lambda), \quad (\lambda \in \Lambda)$$

と定義する．そのとき，すべての $a \in A$ と $f \in \sum X_\lambda$ で $T_a f \in \sum X_\lambda$ となるならば，$a \to T_a$ は A の $\sum X_\lambda$ における一つの表現となるわけである．たとえば表現 $a \to T_a^{(\lambda)}$ が λ に対して一様有界，すなわち λ に無関係で a のみに関係する定数 β_a で $\|T_a^{(\lambda)}\| \leqq \beta_a$ ならば，$T_a f \in \sum X_\lambda$ となり $a \to T_a$ は A の $\sum X_\lambda$ における表現となる．なんとならば $\sum \|(T_a f)(\lambda)\|_\lambda^2 = \sum \|T_a^{(\lambda)} f(\lambda)\|_\lambda^2 \leqq \beta_a^2 \sum \|f(\lambda)\|_\lambda^2$ で $\|T_a\| \leqq \beta_a (a \in A)$ である．さて $a \to T_a$ が *-表現なることは，$\sum X_\lambda \ni f,\ g$ に対して

$$(T_a f, g) = \sum (T_a^{(\lambda)} f(\lambda),\ g(\lambda))_\lambda = \sum (f(\lambda),\ T_{a^*}^{(\lambda)} g(\lambda))_\lambda = (f,\ T_{a^*} g)$$

から明らかである．この A の $\sum X_\lambda$ における表現 $a \to T_a$ は，もし定義されれば表現 $a \to T_a^{(\lambda)} (\lambda \in \Lambda)$ の**直和**とよぶ．

つぎに任意の *-環 A に対してその *-表現を作ることを考える．いま X を自己共役空間とし $f_0 \in X$ を固定する．もし A の X における *-表現 $a \to T_a$ が存在するとして

$$F(a) = (T_a f_0,\ f_0) \quad (a \in A)$$

とおけば明らかにFはAの上の線型汎関数となる．さらに

$$(T_{a^*}f_0, f_0)=(f_0, T_a f_0)=\overline{(T_a f_0, f_0)}$$

なるゆえ，Fは $F(a^*)=\overline{F(a)}$ $(a\in A)$ なる性質をもつことになる．この性質をもつAの上の線型汎関数を **Hermite 的**ということにする．もしAがノルム環，Xがノルム空間とし表現 $a\to T_a$ が強連続と仮定すれば，すなわち $\|T_a f\|\leqq\beta_f\|a\|$ ならば

$$|F(a)|=|(T_a f_0, f_0)|\leqq\beta_{f_0}\|f_0\|\,\|a\|(a\in A).$$

かくしてFは有界線型汎関数となる．逆に任意の Hermite 汎関数Fはある自己共役空間Xと，それにおけるAのある *-表現 $a\to T_a$ で $F(a)=(T_a f_0, f_0)$ と表わされることは後で述べる（定理 6·17）．

さて F_0 を，Aの Hermite 元全体からなる実線型空間 H_A の上の実線型汎関数とする．$x\in A$ を Hermite 成分 h と k にわけ，$x=h+ik$ としたとき（6·1 節参照）

$$F(x)=F_0(h)+iF_0(k)$$

と定義すれば F は A の上の Hermite 線型汎関数となる．すなわち $F(x^*)=\overline{F(x)}$ である．さらにAが *-ノルム環で F_0 が有界ならばFもまた有界となる．なんとならば

$$\begin{aligned}|F(x)|&=\left|F_0\left(\frac{x+x^*}{2}\right)+iF_0\left(\frac{x-x^*}{2i}\right)\right|\\&\leqq\|F_0\|\left(\left\|\frac{x+x^*}{2}\right\|+\left\|\frac{x-x^*}{2}\right\|\right)\leqq\|F_0\|(\|x\|+\|x^*\|)\\&=2\|F_0\|\,\|x\|\ (A\text{ は }\|x^*\|=\|x\|\text{ をみたすゆえ}).\end{aligned}$$

となるからである．すなわち $\|F\|\leqq2\|F_0\|\leqq2\|F\|$ である．Aの上の線型汎関数 F が H_A の上で実数値をとるための必十条件はFが Hermite 的となることである．これは定義よりほとんど明らかであり，またもしすべての（有界）Hermite 的汎関数Fで $F(a)$ が実数ならaは Hermite 元であることもわかる．なんとなれば $a=h+ik$ と Hermite 成分にわけたとき，前のようにH_Aの上の任意の実（有界）線型汎関数 F_0 に対して Hermite 汎関数Fを作れば $F(a)=F_0(h)+iF_0(k)$．仮定から $F_0(k)=0$．F_0 は任意なるゆえ $k=0$ となる．

定理 6·16 Aの上の線型汎関数 F は一意に $F=F_1+iF_2$ とかける．ただし

F_1, F_2 は Hermite 汎関数である．

証明 $F_1(x)=1/2[F(x)+\overline{F(x^*)}]$, $F_2(x)=(1/2i)[F(x)-\overline{F(x^*)}]$ とおけば F_1, F_2 は求めるものである．一意性はほとんど明らか． qed

さてFをAの上の Hermite 汎関数とし，Aの任意の二つの元 x, y に対して

$$(x, y)=F(y^*x)$$

と定義すれば，(x, y) はスカラー積の定義の（ii)，(iii）を満たすが（i）は一般には満たすとは限らない．6·3 節（定義a）で示したように $M=\{x : \forall y$ で $(x, y)=0\}$ で A/M を作れば，その上で定義されたスカラー積 (x', y') は（i）も満たす．いまの場合に当てはめて考えれば

$$I_F=\{x : \forall y \in A \text{ で } F(y^*x)=0\}$$

とおけば I_F は A の左イデアルで，$X_F=A/I_F$とおけば，任意の x', $y' \in X_F$ に対して X_F のスカラー積を

$$(x', y')=F(y^*x)$$

と定義することにより X_F は自己共役空間となる．Aがノルム環で F 有界なら I_F は閉で，$\|x'\|=\inf\{\|x+m\| : m \in I_F\}$ は X_F のノルムであるから

$$|(x', y')| \leqq \|F\| \, \|x+m_1\| \, \|(y+m_2)^*\|, \quad (m_1, m_2 \in I)$$

であり，$\|x+m_1\|$ の下限をとれば $|(x', y')| \leqq \|F\| \, \|x'\| \, \|(y+m_2)^*\|$ となり，(x', y') は x' で連続，同様に $(|(x', y)|=|(y', x')|$ なるゆえ)

$$|(x', y')| \leqq \|F\| \, \|(x+m_1)^*\| \, \|y+m_2\|$$

であるから y' に関しても連続となり，結局 (x', y') は x', y' で別々に連続となり，Aが Banach 環なら x', y' に関して連続となる（1·1 節A項 i）．すなわち X_F はノルム自己共役空間となる．つぎは Hermite 汎関数から A の *-表現が構成できることを示す．

定理 6·17 F を環 A の上の Hermite 汎関数とする．そのとき自己共役空間Xと，Aの X における *-表現 $a \to T_a$ が存在して，あるX の固定された元 f_0 で

$$F(a)=(T_a f_0, f_0) \qquad (a \in A)$$

もしAがノルム *-環で F を有界とすれば，X はノルム自己共役空間でありその表現は $\|T_a\| \leqq \|a\|$ $(a \in A)$ を満たす．

証明 まずAが単位元をもつと仮定する．上に示した仕方でFからえられた自己共役空間 X_F をX とおく．また求める表現 $a\to T_a$ を A の左正則表現の X_F への還元（2·2 節）とおく．すなわち $T_a x'=(ax)'$ とする．$f_0=1'$ とおけば

$$(T_a x', y')=F(y^* ax)=F((a^* y)^* x)=(x', T_{a^*} y'),$$
$$(T_a f_0, f_0)=(a', 1')=F(a).$$

ゆえに $a\to T_a$ は *-表現で $F(a)=(T_a f_0, f_0)$ となる．またAがノルム *-環でFを有界とすれば X_F はノルム空間で，$\|T_a\|\leqq\|a\|$ も明らか．さてAが単位元をもたないときは，それに単位元を添加したもの A_1 をとする（1·1 節C項）．Aの対合をつぎのように A_1 に拡張する：$(\alpha+x)^*=\bar{\alpha}+x^*$．そのとき$A$がノルム *-環なら A_1 もそうであり，$F_1(\alpha+x)=\alpha+F(x)$ とおけば F_1 は A_1 の上の Hermite 作用素でFの拡張となる．なんとなれば

$$F_1((\alpha+x)^*)=F_1(\bar{\alpha}+x^*)=\bar{\alpha}+F(x^*)=\bar{\alpha}+\overline{F(x)}=\overline{F(\alpha+x)}$$

となるからである．またFが有界なら F_1 も有界となるから，この場合はAが単位元をもつ場合に帰着される． *qed*

ここでこの節での主目的である Schatz ［文献 84)］の定理の証明をすることになる．任意の複素 *-ノルム環は適当な *-表現で $\mathfrak{B}(X)$ の中へうめこみできることをいう．

定理 6·18 Aを複素 *-ノルム環とする．そのときノルム自己共役空間XとAのXに関する *-表現 $a\to T_a$ が存在して，それがAから $\mathfrak{B}(X)$ の中への同相写像になる．またすべての $a\in A$ で $\|a\|\leqq 2\|T_a\|\leqq 2\|a\|$ で $h\in H_A$ に対しては $\|T_h\|=\|h\|$ となる．

証明 もし必要ならAに単位元を添加して考えればよいから，始めからAは単位元をもつと仮定してよい．$\mathfrak{F}=\{F_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ をノルムが1であるAの上の Hermite 汎関数全体の集合とする．F_λ から作られたノルム自己共役空間 X_{F_λ}（定理 6·17）を X_λ とおくことにする．もし x_λ，$y_\lambda\in X_\lambda$ なら

$$|(x_\lambda, y_\lambda)|=|F_\lambda(y^* x)|\leqq\|x\|\,\|y\|.$$

ここで x，y はおのおの x_λ，y_λ と同じ類に入っているとする．上の式の右辺の下限をとれば，つぎの式をうる．

$$|(x_\lambda,\ y_\lambda)|\leqq\|x_\lambda\|_\lambda\|y_\lambda\|_\lambda.$$

すなわち X_λ のスカラー積は一様有界となるわけで X_λ の直和 $X=\sum X_\lambda$ が定義でき，$|(f, g)|\leqq\|f\|\,\|g\|(f, g\in X)$ となる．さて $a\to T_a^{(\lambda)}$ を定理 6・17 で求められたAの X_λ における *-表現とすれば，$a\in A, \lambda\in \Lambda$ に対して $\|T_a^{(\lambda)}\|\leqq\|a\|_\lambda$ なるゆえ，これらの直和は A の X における *-表現 $a\to T_a$ となり $\|T_a\|\leqq\|a\|$ を満たす．$h\in H_A$ に対して $\|T_h\|=\|h\|$ なること：Hahn-Banach の定理よりAの上の実線型汎関数Fが存在して $\|F\|=1$, $F(h)=\|h\|$ となる．つぎに Hermite 汎関数 F_1 をつぎのように作る．

$$F_1(x)=\frac{1}{2}(F(x)+F(x^*)) \qquad (x\in A)$$

$F_1(h)=\|h\|$, $\|F_1\|=1$ なることは明らか．なんとなれば $|F_1(x)|\leqq1/2(|F(x)|+|F(x^*)|)\leqq1/2(\|x\|+\|x^*\|)=\|x\|$ となるからである．Aは単位元をふくむゆえ F_1 はイデアル $I_{F_1}=\{x: \forall y\in A$ で $F_1(y^*x)=0\}$ の上で 0 にならなければならぬ．なんとなれば $x\in I_{F_1}$ なら $F_1(x)=F_1(1\cdot x)=0$ となるからである．このことから $\|h\|=F_1(h)=F_1(h+x)\leqq\|h+x\|(x\in I_{F_1})$ となり，右辺の下限をとることにより $\|h\|=\|h'\|$ をうる．もちろん h' は h の X_{F_1} の中への像である．$F_1\in\mathfrak{F}$ であるからある $\mu\in\Lambda$ で $F_1=F_\mu$. ゆえに h_μ を h の $X_\mu(=X_{F_\mu})$ の中への像とすれば

$$\|h\|=\|h_\mu\|,\quad F_\mu(h)=\|h\|.$$

いまΛの上で定義された関数 f_μ をつぎのようにおく．

$$f_\mu(\lambda)=\begin{cases}1_\mu, & \lambda=\mu\\ 0_\lambda, & \lambda\neq\mu.\end{cases}$$

ここで 1_μ, 0_λ はおのおの X_μ, X_λ の上で定義した $h_\mu(h=1)$ および零元を表わす．そのとき $f_\mu\in X$, $\|f_\mu\|=1$ で定理 6・17 から

$$(T_af_\mu, f_\mu)=F_\mu(a) \qquad (a\in A).$$

$|(T_af_\mu, f_\mu)|\leqq\|T_af_\mu\|\,\|f_\mu\|\leqq\|T_a\|$ となるから

$$|F_\mu(a)|\leqq\|T_a\| \quad (a\in A,\ \mu\in\Lambda).$$

さて $a\in A$ を Hermite 成分 h, k で分解し $a=h+ik$ とする．h に対して $F_\mu(h)=\|h\|$ となる $\mu\in\Lambda$ が存在するから，$F_\mu(a)=F_\mu(h)+iF_\mu(k)$ なることから

$$\|h\|=F_\mu(h)\leqq|F_\mu(a)|\leqq\|T_a\|.$$

同様にして $||k||\leqq||T_a||$ となるゆえ

$$\max(||h||,\ ||k||)\leqq||T_a||\leqq||a||.$$

ここで a を h (Hermite 元) とおけば $k=0$ なるゆえ $||T_h||=||h||$ となる．任意の $a\in A$ に対しては

$$||a||\leqq||h||+||k||\leqq 2\max(||h||,\ ||k||)$$

から $||a||\leqq 2||T_a||\leqq 2||a||$ $(a\in A)$ をうる． *qed*

系 6·19 A のノルムが B^*-条件を満たせば，前の定理で求められた *-表現 $a\to T_a$ は等長写像となる．すなわち $||T_a||=||a||(a\in A)$ である．

証明 $||a||^2=||a^*a||=||T_{a^*a}||\leqq||T_{a^*}||\ ||T_a||\leqq||a^*||\ ||a||=||a||^2$

となり $||a||^2=||T_a||\ ||T_{a^*}||$ が出る．これと $||T_a||\leqq||a||,\ ||T_{a^*}||\leqq||a||$ からこの系は明らか． *qed*

6·4 Hilbert 空間における表現

ここでは *-環の Hilbert 空間における *-表現について考える．とくに後の節のために，Hilbert 空間における *-表現の族の直積と，正値汎関数について論ずる．この節を通じて環は複素環とする．

A. Hilbert 空間における *-表現の直和

Hilbert 空間 H ではノルム $||x||$ は $(x,\ x)^{1/2}$ に等しい．T を $\mathfrak{B}(H)$ の元とし，そのノルムを $||T||$ とすれば $\mathfrak{B}(H)$ では B^*-条件 $||T^*T||=||T||^2$ が満たされることは前に見た．

$a\to T_a^{(1)}$, $a\to T_a^{(2)}$ をおのおの *-環 A の Hilbert 空間 H_1, H_2 における *-表現とする．もし H_2 から H_1 の上へのユニタリー変換 U が存在して $T_a{}^{(2)}=U^{-1}T_a{}^{(1)}U(a\in A)$ となるならばこの二つの表現は**ユニタリー同値**ということにする．U が**ユニタリー変換**であるというのは，任意の $x,\ y\in H_2$ で $(Ux,\ Uy)=(x,y)$ となることで，またいいかえればすべての $x\in H_2$ で $||Ux||=||x||$ であることである．今後用いる“サイクリック”,“既約”はとくにことわらなければ“位相的サイクリック”,“位相的既約”をおのおの表わすものとする (2·2 節)．

さて $a\to T_a$ を *-環 A の Hilbert 空間 H における *-表現とする．いま M を H の閉部分空間とし，この表現に関して不変とする．すなわち任意の $a\in A$

で $T_a(M)\subset M$ とする．そのとき M の直交補空間 $M^\perp$ もまた不変部分空間となる．なんとなれば $f\in M$, $g\in M^\perp$ で $T_{a^*}f\in M$ なるゆえ

$$(f, T_ag)=(T_{a^*}f, g)=0 \qquad (a\in A)$$

となるから，任意の $g\in M^\perp$ で $T_ag\in M^\perp$ となる．これは $M^\perp$ が不変なることを示す．ここで $N=\{f\in H: \forall a\in A$ で $T_af=0\}$ とおけば N は H の閉不変部分空間なることは明らかである．$N=(0)$ の場合，表現 $a\to T_a$ を**本質的** (essential) であるという．任意の表現を $N^\perp$ に縮小した表現はもちろん本質的表現である．また A が単位元 1 をもち $T_1(T_a, a=1$ のとき) が恒等写像 I のとき，表現 $a\to T_a$ はやはり本質的であることは明らか．

定理 6·20 表現 $a\to T_a$ が本質的であり，f を H の固定された元とすれば $H_f=\overline{\{T_af: a\in A\}}$ はサイクリック部分空間となる．

証明 $f\in H_f$ を証明すればよい．$f=f_1+f_2$, $f_1\in H_f$, $f_2\in H_f{}^\perp$ と分解する．H_f は不変部分空間なることは明らかであるから $T_af_2=T_af-T_af_1\in H_f$. また $H_f{}^\perp$ も不変なるゆえ $T_af_2\in H_f{}^\perp$. それゆえすべての $a\in A$ で $T_af_2=0$ となる．表現は本質的であるゆえ $f_2=0$ となり $f\in H_f$ が導かれる．qed

つぎは二つの表現のユニタリー同値性に関する定理である．

定理 6·21 $a\to T_a{}^{(1)}$, $a\to T_a{}^{(2)}$ をおのおの *-環 A の Hilbert 空間 H_1, H_2 におけるサイクリック *-表現とする．この二つの表現がユニタリー同値であるための必十条件は，サイクリック元 $f_1\in H_1$, $f_2\in H_2$ が存在して，すべての $a\in A$ に対して $(T_a{}^{(1)}f_1, f_1)=(T_a{}^{(2)}f_2, f_2)$ となることである．

証明 まずこの二つの表現がユニタリー変換 U のもとに同値であったとする．f_2 を H_2 の任意のサイクリック元とし $f_1=Uf_2$ とおけば $T_a{}^{(1)}f_1=T_a{}^{(1)}Uf_2=UT_a{}^{(2)}f_2$. $\{T_a{}^{(2)}f_2; a\in A\}$ は H_2 で稠密でありUは H_2 から H_1 の上へのユニタリー変換であるから $\{T_a{}^{(1)}f_1: a\in A\}$ は H_1 の中で稠密である．いいかえれば f_1 は H_1 のサイクリック元である．また

$$(T_a{}^{(1)}f_1, f_1)=(T_a{}^{(1)}Uf_2, Uf_2)=(UT_a{}^{(2)}f_2, Uf_2)$$
$$=(T_a{}^{(2)}f_2, f_2) \qquad (a\in A)$$

これで必要性は証明された．さて今度は $(T_a{}^{(1)}f_1, f_1)=(T_a{}^{(2)}f_2, f_2)$ $(a\in A)$ を仮定する．$D=\{T_a{}^{(2)}f_2: a\in A\}$ は H_2 の中で稠密であるが，いま $UT_a{}^{(2)}f_2=T_a{}^{(1)}f_1$ と D の上で U を定義する．U が定義できることはつぎのことからわ

かる.

$$\|T_a^{(1)}f_1\|^2=(T_a^{(1)}f_1,\ T_a^{(1)}f_1)=(T_{a^*a}^{(1)}f_1,\ f_1)$$
$$=(T_{a^*a}^{(2)}f_2, f_2)=(T_a^{(2)}f_2,\ T_a^{(2)}f_2)=\|T_a^{(2)}f_2\|^2$$

それゆえまた $\|UT_a^{(2)}f_2\|=\|T_a^{(2)}f_2\|$ となり，その結果UはH_2の一つの稠密部分空間をH_1の1つの稠密部分空間上に写すユニタリー変換であるから，それはH_2からH_1の上のユニタリー変換に拡張できる．それを新めてUとおけば

$$UT_a^{(2)}T_x^{(2)}f_2=T_{ax}^{(1)}f_1=T_a^{(1)}T_x^{(1)}f_1=T_a^{(1)}UT_x^{(2)}f_2 \qquad (a, x\in A)$$

はUの定義より導かれ，$\{T_x^{(2)}f_2\}$ がH_2の中で稠密であることから $UT_a^{(2)}=T_a^{(1)}U\ (a\in A)$ となり，二つの表現はユニタリー同値となる． *qed*

つぎに Banach*-環の *-表現の直和が定義されることを証明する．

定理 6·22 Aを Banach*-環とし $\{H_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ を Hilbert 空間の1つの族とする．Λの任意の元λに対して $a\to T_a^{(\lambda)}$ をAのH_λにおける*-表現とすれば，これらの表現の直和が定義される．

証明 Hilbert 空間では $|(f,g)|\leqq\|f\|\,\|g\|$ であるから $\{H_\lambda\}$ の直和 $\sum H_\lambda$ は定義される(6·3 節)．$\sum H_\lambda$ の元fはΛで定義され $f(\lambda)\in H_\lambda$ で $\sum\|f(\lambda)\|^2<\infty$となるものであり，$\sum H_\lambda$ の内積は $(f,\ g)=\sum(f(\lambda),\ g(\lambda))_\lambda$ で与えられた．$f\in\sum H_\lambda$ に対してつぎのように定義する．

$$(T_af)(\lambda)=T_a^{(\lambda)}f(\lambda) \qquad \lambda\in\Lambda,\ a\in A.$$

$f\in\sum H_\lambda$ に対して $T_af\in\sum H_\lambda$ がいえればよい (6·3 節) が，Aが Banach 環なるゆえ表現 $a\to T_a^{(\lambda)}$ は連続で $\|T_{a^*a}^{(\lambda)}\|\leqq r(a^*a)\ (a\in A, \lambda\in\Lambda)$ となる．なんとなれば $h=a^*a$ とすればhは Hermite 元．表現が連続なるゆえ $\|T_a^{(\lambda)}\|\leqq\alpha\|a\|(a\in A)$ であるから，$\|T_h^{(\lambda)}\|^n=\|T_{h^n}^{(\lambda)}\|\leqq\alpha\|h^n\|$．これから $\|T_h^{(\lambda)}\|\leqq\alpha^{1/n}\|h^n\|^{1/n}$ となり，$n\to\infty$ とすれば $\|T_h^{(\lambda)}\|\leqq r(h)$ をうる．かくして $a\in A,\ f\in\sum H_\lambda$ に対して

$$\|(T_af)(\lambda)\|^2=\|T_a^{(\lambda)}f(\lambda)\|^2=(T_a^{(\lambda)}f(\lambda),\ T_a^{(\lambda)}f(\lambda))$$
$$=(T_{a^*a}^{(\lambda)}f(\lambda),\ f(\lambda))\leqq\|T_{a^*a}^{(\lambda)}\|\,\|f(\lambda)\|^2\leqq r(a^*a)\|f(\lambda)\|^2$$

これは $T_af\in\sum H_\lambda$ を示し，T_aは有界となる． *qed*

定理 6·23 *-環Aの Hilbert 空間における任意の本質的*-表現はサイクリック表現の直和にユニタリー同値である．

証明 $a\to T_a$ をAの Hilbert 空間Hにおける本質的 *-表現とする．その表現は本質的であるからHの中に（0）でないサイクリック部分空間が存在する（定理 6·20）．いま $\{H_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ を $\lambda_1\neq\lambda_2$ に対して H_{λ_1} と H_{λ_2} が直交するようなサイクリック部分空間の極大族とする．このような極大族の存在は Zorn の補題から明らかである．$\{H_\lambda\}$ の任意の異なる二つの空間は互いに直交しているから，$f\in\sum H_\lambda$ に対して $\sum f(\lambda)$ は H の 1 つの元に収束する．なんとなれば $f_{(p_1,\cdots,p_n)}=\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_{p_i})$．$f_{(q_1,\cdots,q_m)}=\sum_{j=1}^{m} f(\lambda_{q_j})$ とすれば，$\{q_1,\cdots,q_m\}\supset\{p_1,\cdots,p_n\}$ に対して $\|f_{(q_1,\cdots,q_m)}-f_{(p_1,\cdots,p_n)}\|^2\leqq\|\sum_{q_l\notin(p_1,\cdots,p_n)} f(\lambda_{q_l})\|^2=\sum_{q_l\notin(p_1,\cdots,p_n)}\|f(\lambda_{q_l})\|^2$ となるから $\sum f(\lambda)$ の収束性がわかる．ところで $f\to\sum f(\lambda)$ は $\sum H_\lambda$ からHの 1 つの閉部分空間 H_0 の上へのユニタリー写像Uを定義する．ここで H_0 は $H_\lambda\,(\lambda\in\Lambda)$ すべてをふくむHの最小の閉部分空間であることがわかる．また H_0 はHの不変部分空間である．しかし表現は本質的なるゆえ，$H_0{}^\perp$ は（0）となる．なんとなればもしそうでないなら，定理 6·20 より $H_0{}^\perp$ に（0）でないサイクリック部分空間がふくまれる（定理 6·20 でMを不変部分空間としたとき，$f\in M$ に対して H_f を考えれば $M\supset H_f$ となる）．これは族 $\{H_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ の極大性に反する．それゆえ $H_0=H$ となる．いま $a\to T_a$ を H_λ に縮小したものを $a\to T_a{}^{(\lambda)}$ とすれば，この表現は位相的サイクリックである．また任意のλで $\|T_a{}^{(\lambda)}\|\leqq\|T_a\|$ であるゆえ表現 $a\to T_a{}^{(\lambda)}$ の直和が定義されて，それが $\sum H_\lambda$ の上の一つの表現 $a\to T_a{}'$ となるわけだが，この表現は始めに与えた表現 $a\to T_a$ とユニタリー同値となることが証明されればこの定理の証明は完了する．さて $f\in\sum H_\lambda$ に対して

$$\sum(T_a{}'f)(\lambda)=\sum T_a{}^{(\lambda)}f(\lambda)=\sum T_af(\lambda)=T_a\sum f(\lambda).$$

さきに定義したユニタリー変換Uで $UT_a{}'=T_aU$ なることがわかる． qed

B．正値汎関数

Aを複素 *-環とし，Aの上の Hermite 汎関数Fを考える．X_F をFに関する自己共役空間とする（6·3 節）．すなわち $I_F=\{x\in A : \forall y\in A$ で $F(y^*x)=0\}$ とし $X_F=A/I_F$ とおく．$x'=x+I_F$，$y'=y+I_F$ に対して $(x',y')=F(y^*x)$ とおけば，それは X_F のスカラー積となるわけであるが，さらにすべての $x\in A$ で $F(x^*x)\geqq0$ となる場合には $(x',x')\geqq0$ となりスカラー積は正

値で，したがって X_F は pre-Hilbert 空間となる．線型汎関数 F は任意の x で $F(x^*x)\geqq 0$ となるとき**正値汎関数**とよぶことにする．

F を A の上の正値汎関数とする．ξ,η を任意の二つの複素数として，$x,y\in A$ で $u=\xi x+\eta y$ とおく．そのとき

$$F(u^*u)=|\xi|^2F(x^*x)+\bar{\xi}\eta F(x^*y)+\xi\bar{\eta}F(y^*x)+|\eta|^2F(y^*y).$$

$F(z^*z)$ の型のものはいつも実数（実は $\geqq 0$）であるから，任意の複素数 ξ, η で

$$\bar{\xi}\eta F(x^*y)+\xi\bar{\eta}F(y^*x)$$

は実数となる．$\xi=\eta=1$ とおけば $F(x^*y)+F(y^*x)$ は実数，$\xi=1$, $\eta=i$ とおけば $iF(x^*y)-iF(y^*x)$ は実数となるわけであるから $F(y^*x)=\overline{F(x^*y)}$ が成り立つ．

さて ξ を任意の実数，そして $\eta=F(y^*x)$ とおく．$F(u^*u)\geqq 0$ となることから，任意の実数 ξ で

$$\xi^2F(x^*x)+2\xi|F(y^*x)|^2+|F(y^*x)|^2F(y^*y)\geqq 0$$

この ξ の二次式の判別式が 0 または負であることから，Schwarz の不等式：$|F(y^*x)|^2\leqq F(y^*y)F(x^*x)$ が成立する．A が単位元 1 をもつときは $F(y^*x)=\overline{F(x^*y)}$ なる式で $y=1$ とおけば A の任意の正汎関数が Hermite 的（6·3 節）となり，また Schwarz の不等式では $|F(x)|^2\leqq F(1)F(x^*x)$ となる．

さてさきに見たように正値 Hermite 汎関数 F から作られた X_F は pre-Hilbert 空間となったが，それにおける *-表現 $a\to T_a$ は A の X_F における表現であるが，その表現を X_F の完備化 $\bar{X}_F$（すなわち Hilbert 空間）における表現に拡張したい場合には T_a が X_F のノルムに関して有界であるという条件が必要となる．この条件は定理 6·17 によりはつぎの**条件**（**A**）と同等である．

$$\sup_{x\in A}\frac{F(x^*a^*ax)}{F(x^*x)}<+\infty \qquad (a\in A) \tag{A}$$

なんとなれば定理 6·17 の証明の中に見られるように，この表現 $a\to T_a$ は $T_ax'=(ax)'$ と定義された．$(x',y')=F(y^*x)$ であるから

$$||T_ax'||^2=((ax)',\ (ax)')=F((ax)^*ax)=F(x^*a^*ax),$$
$$||x'||^2=(x',x')=F(x^*x)$$

これから T_a の有界性と条件（A）が同等なることがわかった．

さてFを*-環Aの上の線型汎関数とし，固定された $a\in A$ で F_a をつぎのように定義する．

$$F_a(x)=F(a^*xa) \qquad x\in A$$

もしFが正値なら F_a も正値で Hermite 的となる（$F(y^*x)=\overline{F(x^*y)}$ なることから）．Aがノルム環なるとき，すべての $a\in A$ に対して F_a が有界ならばFを**相対的有界** (relatively bounded) ということにする．F が有界なら相対的有界であり，Aが単位元をもつときは両者は同値である．またノルム*-環Aの対合 $x\to x^*$ がAの任意の極大可換 *-部分環の上で連続であるとき，この対合は**局所連続** (locally continuous) であるといわれる．

定理 6·24 Aをノルム *-環としFをAの上の正値線型汎関数とする．Fが相対的有界か，または A が局所連続な対合もつ Banach 環ならば，任意の $a\in A$, $h\in H_A$ に対して

$$|F(a^*ha)|\leqq r(h)F(a^*a)$$

それゆえFは条件（A）を満たす．

証明 Cauchy-Schwarz の不等式から

$$|F(a^*ha)|^2\leqq F(a^*a)F(a^*h^2a)$$

いいかえれば $|F_a(h)|^2\leqq F(a^*a)F_a(h^2)$ $(h\in H_A)$．Fが相対的有界なら F_a は有界で，上の計算をくりかえせば，

$$|F_a(h)|^{2^k}\leqq\alpha^{2^k-1}F_a(h^{2^k})\leqq\alpha^{2^k-1}||F_a||\ ||h^{2^k}||.$$

ここで $\alpha=F(a^*a)$．両辺の 2^k 乗根をとり $k\to\infty$ とすれば，$|F_a(h)|\leqq\alpha r(h)$, すなわち結論を得た．つぎに A を局所連続な対合をもつ Banach 環とする．hを $r(h)<1$ となる H_A の元とすれば，$H_A\ni r$, s が存在して $r\circ r=h$, $s\circ s=-h$ となる．なんとなれば $f(\xi)=-\sum_{n=1}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-\xi)^n$ なる無限整級数を考える．$|\xi|\leqq1$ に対しては $2f(\xi)-f(\xi)^2=\xi$ となり $|\xi|<1$ では絶対収束する (75), p. 349)．$r(h)<1$ なるゆえ，$-\sum_{n=1}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-h)^n$ はAの 1 つの元 r に絶対収束し，$r\circ r=2r-r^2=h$ となる．$s\circ s=-h$ なる s の存在も同様にしてわかる．さて任意の $h\in A$ に対して $v=(1-r)a$, $w=(1-s)a$ とおけば，

$$v^*v=a^*(1-r)^2a=a^*(1-h)a$$
$$w^*w=a^*(1-s)^2a=a^*(1+h)a$$

それゆえFが正値なることから

$$F(a^*(1-h)a)\geqq 0,\quad F(a^*(1+h)a)\geqq 0$$

これらの不等式から $r(h)<1$ なら $|F_a(h)|\leqq F(a^*a)$ がでる．つぎに任意の $h\in H_A$ と $\varepsilon>0$ に対して $h_\varepsilon=(r(h)+\varepsilon)^{-1}h$ とおけば $r(h_\varepsilon)<1$ なるゆえ $|F_a(h_\varepsilon)|\leqq F(a^*a)$．それゆえ

$$|F(a^*ha)|\leqq(r(h)+\varepsilon)F(a^*a)$$

$\varepsilon>0$ は任意であるから定理は証明された． *qed*

定理 6·25 Fを*-環Aの上の条件（A）を満たす Hermite 正値汎関数とする．そのときAの Hilbert 空間Hにおける*-表現 $a\to T_a$ が存在してつぎの性質を満たす．

（i） この表現の核は $I_F:A$ である．

（ii） A からHの稠密な一つの部分空間の上への線型写像 $a\to f_a$ が存在して $F(a^*xa)=(T_xf_a,\ f_a)$ $(x\in A)$ となる．

（iii） A が単位元をもてば表現 $a\to T_a$ はサイクリック元 $f_1\in H$ をもつ位相的サイクリック表現である．ここで $F(a)=(T_af_1,\ f_1)$ $(a\in A)$ となる．

（iv） Aがノルム環でFが相対的有界なら，任意の $h\in H_A$ で $||T_h||\leqq||h||$ となる．もしまたAが*-ノルム環ならば $||T_a||\leqq||a||$ $(a\in A)$ である．

証明 求める表現は前に（6·3 節参照）で作った左正則表現から得られたものである．$I_F:A$ がこの表現の核になっていることは明らか（2·2 節）．Fは条件（A）をみたすゆえ X_F の完備化をHとすればHは Hilbert 空間で，前にも示したとおりこの表現はHにおける表現とみなしてよい．さて $f_a=a+I_F$ とおけば

$$F(a^*xa)=((xa)',\ a')=(T_xf_a, f_a)\qquad(x\in A).$$

ゆえに（ii）は証明された．もしAが単位元をもてば $T_af_1=a'$ となり $\{T_af_1: a\in A\}=X_F$ となりHで稠密となるから（iii）が証明された．（iv）の証明：定理 6·24 より

$$||T_h||^2=\sup\{F(a^*h^2a)/F(a^*a)\}\leqq r(h^2)=r(h)^2$$

は任意の $h\in H_A$ が成立するゆえ $||T_h||\leqq r(h)\leqq||h||$ となる．もしAが*-ノ

ルム環なら $\|x^*\|=\|x\|$ なるゆえ

$$\|T_a\|^2=\|T_{a^*a}\|\leqq\|a^*a\|\leqq\|a\|^2$$

がすべての $a\in A$ でいえるから $\|T_a\|\leqq\|a\|$ となる. *qed*

さて*-環 A から Hilbert 空間 H への任意の*-表現 $a\to T_a$ を考える. f_0 を H の固定した元として $F(a)=(T_af_0, f_0)$ とおけば F は正値汎関数で条件 (A) を満たす. なんとなれば

$$F(x^*a^*ax)=\|T_{ax}f_0\|^2\leqq\|T_a\|^2\|T_xf_0\|^2=\|T_a\|^2F(x^*x)$$

が成り立つからである. 上の定理の (iii) は A が単位元をもつとき, 逆に任意の (A) を満たす正値汎関数 F はサイクリック元 f_0 でそのような形になることを示している.

6・5 対　称　*-環

A を単位元をもつ可換 Banach *-環とし, A の対合が Hermite 的とする. すなわちすべての $x\in A$ と $\varphi\in M_A$ で, $\hat{x}^*(\varphi)=\overline{\hat{x}(\varphi)}$ とする. この条件は実は $1+x^*x (x\in A)$ が正則元 (すなわち逆元をもつ) であることと同等である. なんとなれば $\hat{x}^*(\varphi)=\overline{\hat{x}(\varphi)}$ となれば $(1+x^*x)^\wedge(\varphi)\geqq1$ となり, $1+x^*x$ は逆元をもつ. また後に示す定理 6・28 (i) より $1+x^*x (x\in A)$ が正則元なら A の対合は Hermite 的となる. このような可換 Banach *-環を Naĭmark は完全対称環 (totally symmetric algebra) とよんだが, ここでは単位元をもつことも, 可換なることも仮定せずに, 任意の $x\in A$ に対して $-x^*x$ が擬正則となるとき (単位元1をもてば $1+x^*x$ が正則となる) A を対称環 (symmetric algebra) ということにする. この節では対称環の性質をしらべる. これはまたつぎの節の B^*-環の構造をしらべるに際して必要となる.

対称環を考える前に弱正値汎関数とよばれるものについて述べる.

A を*-環とし, F を A の上の Hermite 汎関数とする. そのとき任意の $h\in H_A$ に対して $F(h^2)\geqq0$ となるとき F を**弱正値** (weakly positive) ということにする. 正値汎関数はもちろん弱正値であることは明らかである. 弱正値汎関においては弱い意味の Schwarz の不等式が成り立つ. すなわち

$$|F(hk+kh)|^2\leqq4F(h^2)F(k^2) \qquad (h,\ k\in H_A).$$

かくして h と k が可換であれば $|F(hk)|^2\leqq F(h^2)F(k^2)$ であり, A が単位元を

もてば $|F(h)|^2 \leqq F(1)F(h^2)$ となる.

hが実のスペクトルをもてば h^2 は負でないスペクトルをもつが (定理 1·23) つぎはその部分的な逆を証明している.

定理 6·26 Aを単位元をもつ Banach 環とする. もし aが正のスペクトルをもつAの元とすれば, 実スペクトルをもつAの元 b が存在して $b^2=a$ となる. もしAが局所連続な対合をもち $a \in H_A$ ならば, また $b \in H_A$ となる.

証明 a にスカラーをかけることを考えれば $0<\sigma(a)<1$ と仮定して一般性を失なわない (定理 1·23). この場合また $0<\sigma(1-a)<1$ となる. それゆえ $r(1-a)<1$ となる (定理 1·19 (ii)). ところで定理 6·24 の証明より $k \in A$ が存在して $k \circ k=1-a$ となり, ここで $b=1-k$ とおけば $b^2=a$ となることは明らか. 対合が局所連続であるときは $a \in H_A$ なら $k \in H_A$ にとれその結果 $b \in H_A$ となる. ところでまた, 定理 6·24 の証明より b は a の実多項式の極限で表わされるから定理 1·23, 定理 1·28 より実スペクトルをもつ. *qed*

定義 hを Banach 環Aの Hermite 元のとき, $\sigma(h) \geqq 0$ となる場合 $h \geqq 0$ とかくこととする. また $k-h \geqq 0$ となるときは $k \geqq h$ と書く.

定理 6·27 A を単位元をもち局所連続 Hermite 対合をもつ Banach *-環とすれば, Hermite 汎関数Fに対してつぎの三つの条件はすべて同等である.

(i) Fは弱正値.

(ii) $h \in H_A$, $h \geqq 0$ なら $F(h) \geqq 0$ である.

(iii) $h \in H_A$ では $|F(h)| \leqq F(1)r(h)$.

証明 (i) を仮定して (ii) を証明するために $h \geqq 0$ とおく. 任意の $\varepsilon>0$ に対して $\sigma(h+\varepsilon)>0$ (定理 1·23). かくして前定理より $k \in H_A$ が存在して $k^2=h+\varepsilon$ となる. Fは弱正値なるゆえ $F(h+\varepsilon) \geqq 0$. それゆえ任意の $\varepsilon>0$ で $F(h) \geqq -\varepsilon F(1)$. これから $F(h) \geqq 0$ となる. つぎに (ii) を仮定して (iii) を証明する. $h \in H_A$ とすれば, $\sigma(r(h)-h) \geqq 0$ なるゆえ $F(r(h)-h) \geqq 0$ となる. これは $F(h) \leqq F(1)r(h)$ なることを示す. 同様に

$$-F(h)=F(-h) \leqq F(1)r(-h)=F(1)r(h)$$

となるから $|F(h)| \leqq F(1)r(h)$ となる. 最後に (iii) から (i) を証明する. これには $h \in H_A$ に対して $F(h^2) \geqq 0$ を証明すればよいわけであるが, 正の定数をかけることによって $r(h) \leqq 1$ としても一般性を失わない. また $r(h^2) \leqq 1$

なるゆえ $0 \leqq \sigma(h^2) \leqq 1$ となる．これから $0 \leqq \sigma(1-h^2) \leqq 1$ となり $r(1-h^2) \leqq 1$ がでる．

$$F(1)=F(h^2)+F(1-h^2) \leqq F(h^2)+F(1)r(1-h^2) \leqq F(h^2)+F(1).$$

これは $F(h^2) \geqq 0$ なることを示す．　*qed*

つぎに Banach *-環Aの上の Hermite 汎関数Fが正値なることと弱正値なることが同値となるようなAを考える．

定義　Banach *-環 A が対称環 (symmetric algebra) といわれるのはAの任意の元 x で$-x^*x$ がAの擬正則元となることである．

対称環の性質をつぎに列挙する．

定理 6·28　Aを対称 Banach *-環とするときつぎが成立する．

(i)　Aの対合は Hermite 的で，Aの任意の元 x に対して $xx^* \geqq 0$ となる．

(ii)　BをAの閉 *-部分環とすればBもまた対称環となる．

(iii)　Aが単位元をもち局所連続な対合をもてば，Aの上の Hermite 汎関数が正値であることと弱正値であることは同等となる．

(iv)　A が単位元をもたないとき，それに単位元を添加した環 A_1 も対称 Banach *-環となる．

証明　(i)　$h \in H_A$ に対して $-h^2$ は擬正則であるから定理 6·4 よりAの対合は Hermite 的である．さて $\lambda<0$ に対して $z=|\lambda|^{-1/2}x$ とおけば $\lambda^{-1}x^*x=-z^*z$．それゆえ $\lambda^{-1}x^*x$ は擬正則．λは任意の負の実数なるゆえ $\sigma(x^*x) \geqq 0$ となる．(ii)　定理 6·6 より明らか．(iii)　この定理の (i) と前定理より明らか．(iv)　$\xi+x$ を A_1 の任意の元とし $h=\bar{\xi}x+\xi x^*+x^*x$ とおく．そのとき $h \in H_A$ でかつ $(\xi+x)^*(\xi+x)=|\xi|^2+h$ である．さてBをhをふくむAの極大可換 *-部分環とすれば定理 6·3 よりBはAの閉 *-部分環となり (ii) よりB自身対称環となる．いまφを M_B (3·1 節) の任意の元とし $u \in B$ を $\hat{u}(\varphi)=1$ のように選ぶ．そのとき $\hat{u}^*(\varphi)=1$ である (6·2 節)．$y=(\xi+x)u$ とおくと $y^*y=u^*(|\xi|^2+h)u$ となり，Aは対称であるゆえ $\sigma_B(y^*y)=\sigma_A(y^*y) \geqq 0$ (定理 1·27)．それゆえ，とくに

$$|\xi|^2+\hat{h}(\varphi)=\hat{u}^*(\varphi)(|\xi|^2+\hat{h}(\varphi))\hat{u}(\varphi)=(y^*y)\hat{\ }(\varphi) \geqq 0$$

これから $|\xi|^2+\sigma_B(h) \geqq 0$ となり

$$\sigma_{A_1}(|\xi|^2+h)=|\xi|^2+\sigma_A(h)=|\xi|^2+\sigma_B(h)$$

となることから $(\xi+x)^*(\xi+x)\geqq 0$ であり A_1 は対称となる. qed

定義 Aを Banach *-環としたとき $\mathfrak{F}_A$ は $\mu_F\leqq 1$ となる有界正値 Hermite 汎関数Fの全体であるとする. ここで μ_F は

$$\mu_F=\sup_{x\in A}\frac{|F(x)|^2}{F(x^*x)}$$

ところでAを単位元をもち局所連続対合をもつ対称 Banach *-環とし, BをAの閉 *-部分環でAの単位元をふくむとする. そのとき前定理 (ii) よりBもまた対称である. FをAの上の正値汎関数とするとき F' をもってFのBの上の縮小とする.

定理 6·29 A, B に上のような仮定をする. そのとき写像 $F\to F'$ はAの上の正値汎関数全体の族を B の上の正値汎関数全体の族の上に写し, $\mathfrak{F}_A$ は $\mathfrak{F}_B$ の上に, $\mathfrak{F}_A$ の端点の集合は $\mathfrak{F}_B$ の端点の集合の上に写す.

証明 F' はBの上の正値汎関数となることは明らかである. つぎに F_0 をBの上の任意の正値汎関数とする. そのとき定理 6·27 (iii) より $|F_0(h)|\leqq F_0(1)r(h)$ $(h\in H_B)$. ところで $r(h)$ は H_B の上で劣加法的 (subadditive) なることがいえる: h, $k\in H_A$ で $r(h+k)\leqq r(h)+r(k)$ (この後の定理を見よ). ゆえに Hahn-Banach の定理 (1·1 節A項 a) より F_0 は H_A の上の線型汎関数 (それを再び F_0 とおく) に拡張できて$|F_0(h)|\leqq F_0(1)r(h)$ $(h\in H_A)$ を満たす. Fを F_0 の拡張でAで定義された Hermite 汎関数とする. そのとき定理 6·27, 定理 6·28 (iii) によりFはAの上の正汎関数となる. ここでこのFでは $F'=F_0$ となることは明らかであるから写像 $F\to F'$ はBの上の正値汎関数全体の上へ写すことがわかった. また $F\in\mathfrak{F}_A$ となる必十条件は $F(1)\leqq 1$ なるゆえ (p.196 参照) $\mathfrak{F}_A$ は $\mathfrak{F}_B$ の上に写ることも明らか. 最後に E' を $\mathfrak{F}_B$ の一つの端点とする. $\mathfrak{F}_0=\{F\in\mathfrak{F}_A: F'=E'\}$ とおくと, それは $\mathfrak{F}_A$ の凸集合で, H_A による弱位相で閉である. それゆえ $\mathfrak{F}_0$ は端点をふくむ. それを F_0 とすれば, これがまた $\mathfrak{F}_A$ の端点となることが証明されればこの定理はすべて証明されたことになる. さて $F_0=\alpha_1F_1+\alpha_2F_2$, $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$, $\alpha_1+\alpha_2=1$, $F_1, F_2\in\mathfrak{F}_A$ と仮定する. そのとき $E'=\alpha_1F_1'+\alpha_2F_2'$ で E' は $\mathfrak{F}_B$ の端点なるゆえ $F_1'=F_2'=E'$ となる. いいかえれば F_1, $F_2\in\mathfrak{F}_0$ となり, F_0 が $\mathfrak{F}_0$ の端点なるゆえ $F_1=F_2=F_0$ となる. qed

この定理でまだ証明されていなかったことがらはつぎのようである．

定理 6・30　A を単位元をもち局所連続な対合をもつ対称 Banach *-環とする．そのとき $h \geqq 0$, $k \geqq 0$ ならば，$h+k \geqq 0$ となる．また任意の h, $k \in H_A$ で

$$r(h+k) \leqq r(h)+r(k).$$

証明　$\lambda>0$ に対して $h_1=h+\lambda$, $k_1=k+\lambda$ とおく．そのとき $\sigma(h_1)>0$, $\sigma(k_1)>0$ (定理 1・23)．定理 6・26 より Hermite 元 u, v が存在して $u^2=h_1$, $v^2=k_1$ となる．また h_1, k_1 は正則なるゆえ u, v も正則である．それゆえ

$$h+k+2\lambda=u^2+v^2=u(1+u^{-1}v^2u^{-1})u=u(1+(vu^{-1})^*(vu^{-1}))u$$

A は対称環なるゆえその定義より上の式の右辺は正則であるから結局 $h+k+2\lambda$ は正則となり，$\lambda>0$ は任意であるから $\sigma(h+k) \geqq 0$ となる．このことから後半がでる．なんとなれば $\alpha>r(h)$, $\beta>r(k)$ とする．$\sigma(\alpha \pm h) \geqq 0$, $\sigma(\beta \pm k) \geqq 0$ となるから

$$\alpha+\beta \pm \sigma(h+k)=\sigma((\alpha \pm h)+(\beta \pm k)) \geqq 0$$

それゆえ

$$-(\alpha+\beta) \leqq \sigma(h+k) \leqq \alpha+\beta$$

これは $r(h+k) \leqq \alpha+\beta$ なることを示す．α, β は $\alpha>r(h)$, $\beta>r(k)$ となる任意の正数なるゆえ定理の後半は証明された．実は逆に任意の h, $k \in H_A$ に対して，$r(h+k) \leqq r(h)+r(k)$ が成立することから $h \geqq 0$, $k \geqq 0$ なら $h+k \geqq 0$ なることも証明されるのである．　qed

表現の既約性と $\mathfrak{F}_A$ の端点との関係はつぎのようである．

定理 6・31　AをBanach*-環とする．そのときFが凸集合 $\mathfrak{F}_A$ の端点ならFから作られたAの *-表現は既約となる (実はその逆もまた真である)．

証明　Fを $\mathfrak{F}_A$ の端点とし，それから作られた *-表現 (6・3, 6・4節) を $a \to T_a$ としたとき $F(x)=(T_xf_0, f_0)$ $(x \in A)$ と表わされる．ここで $a \to T_a$ は Hilbert 空間 H_F における表現である．f_0 はサイクリック元であるから $\{T_xf_0 : x \in A\}$ は H_F の中で稠密となっている．そして

$$\sup_{x \in A}\frac{|F(x)|^2}{F(x^*x)}=\sup_{x \in A}\frac{|(T_xf_0, f_0)|^2}{\|T_xf_0\|^2}=\|f_0\|^2$$

Fは $\mathfrak{F}_A$ の端点なるゆえ上の式の左辺は1となる．なんとなれば上の式の左辺を μ_F とおいたとき $F \neq 0$ なることから $0<\mu_F \leqq 1$．また $0 \in \mathfrak{F}_A$ なるゆえF

はつぎのように書ける．

$$F=(1-\mu_F)\cdot 0+\mu_F(\mu_F^{-1}F)$$

Fは端点なるゆえ $\mu_F=1$ でなければならぬ．その結果 $\|f_0\|=1$ となる．さて $a\to T_a$ が既約でないと仮定する．そのとき0ともIとも異なる射影作用素Pが存在して $PT_a=T_aP(a\in A)$．$\{T_af_0 : a\in A\}$ は H_F で稠密なるゆえ $Pf_0\neq 0$，$(I-P)f_0\neq 0$ となる．ここで

$$\alpha_1=\|Pf_0\|^2,\ f_1=\alpha_1^{-1/2}Pf_0,\ F_1(x)=(T_xf_1,\ f_1),$$
$$\alpha_2=\|(I-P)f_0\|^2,\ f_2=\alpha_2^{-1/2}(I-P)f_0,\ F_2(x)=(T_xf_2,\ f_2)$$

とおけば

$$F=\alpha_1F_1+\alpha_2F_2,\ \alpha_1+\alpha_2=\|Pf_0\|^2+\|(I-P)f_0\|^2=\|f_0\|^2=1$$

Fは端点なるゆえ，$F_1=F_2=F$ となる．しかし $F_1=F$ となれば

$$(T_xf_0,\ f_0)=(T_xf_1,\ f_1)=\alpha_1^{-1}(T_xPf_0,\ Pf_0)$$
$$=\alpha_1^{-1}(T_xf_0,\ Pf_0)\qquad (x\in A)$$

$\{T_xf_0 : x\in A\}$ は H_F で稠密なるゆえ $Pf_0=\alpha_1f_0$ となり，$\alpha_1=\|Pf_0\|^2=\alpha_1^2\|f_0\|^2=\alpha_1^2$．これから $\alpha_1=1$ がでるから $Pf_0=f_0$ となり，$(I-P)f_0\neq 0$ に反す．この矛盾は $a\to T_a$ が既約であることを示している． qed

つぎに *-環Aの *-根基を定義する．

定義 Aの Hilbert 空間におけるすべての位相的既約 *-表現の核の共通集合を R^* で表わし，それを ***-根基**とよぶ．

Banach *-環においては当然 *-根基は閉 *-イデアルであるがまた $R^*\supset R$ なることが証明される．なんとなればRの任意の元xに対して $x^*x\in R$ なるゆえ $r(x^*x)=0$ (定理 2·17)．ところでAの Hilbert 空間における任意の連続 *-表現 $a\to T_a$ で $\|T_h\|\leqq r(h)$ $(h\in H_A)$ が成立する (定理 6·22 の証明参照) から $T_{x^*x}=0$ で $T_x^*T_x=0$．これから $T_x=0$ となり，その核の中にxをふくむからである．

その *-根基についてつぎが成り立つ．

定理 6·32 Banach *-環の *-根基はAの Hilbert 空間におけるすべての *-表現の核の共通集合である．

証明 $a\to T_a$ をAの Hilbert 空間Hにおける任意の *-表現としたとき *-根基 R^* が表現 $a\to T_a$ の核の中にふくまれることが示されればよい．ゆえに

$T_x \neq 0$ なる x に対して $x \notin R^*$ がいえればよい．さてもし $T_x \neq 0$ なら $T_{x^*} \neq 0$ であり，そのとき $f_0 \in H$, $\|f_0\|=1$ が存在して $T_{x^*} f_0 \neq 0$ となる．つぎに F_0 をつぎのように定義する．

$$F_0(a) = (T_a f_0, f_0) \qquad (a \in A).$$

そのとき $F_0 \in \mathfrak{F}_A$ でかつ $F_0(xx^*) \neq 0$ となる．$h = xx^*$ とおけば $h \in H_A$ であるが，ここで $\mathfrak{F}_A$ の端点 F が存在して $F(h) \neq 0$ なることがいえる．もしそれがいえたとする．そのとき F から作られた *-表現を $a \to T_a'$ とすれば定理 6·32 よりそれは既約となる．さらに $F \in \mathfrak{F}_A$ なるゆえ $F(h)^2 \leqq F(h^2)$．$F(h) \neq 0$ なるゆえ $h \notin I_F = \{z \in A : \forall y \in A$ で $F(y^*z) = 0\}$ (6·3 節参照)．これは $h = xx^*$ なるゆえ $x \notin I_F : A$ なることを示している．さてここで $I_F : A$ は既約表現 $a \to T_a'$ の核となる（定理 6·25）からそれが R^* をふくんでいることから $x \notin R^*$ が導かれる．ゆえに残っているところは上の端点 F の存在である．$\mathfrak{F}_A$ は凸集合で H_A による弱位相でコンパクトである．Krein-Milman の定理 (1·1 節A項 f）より $\mathfrak{F}_A$ の端点すべてをふくむ H_A による弱位相での閉凸被は $\mathfrak{F}_A$ に等しい．今 $|F_0(h)| > \varepsilon$ としたとき $\varepsilon > 0$ に対して $\mathfrak{F}_A$ の端点 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ と正数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$ が存在して

$$\left| F_0(h) - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j F_j(h) \right| < \varepsilon$$

ここですべての j で $F_j(h) = 0$ となりえないから，ある j で $F_j(h) \neq 0$ となる．この F_j を F とおけばよい．　　qed

再び A を対称 Banach *-環とする．

定理 6·33　A を対称 Banach *-環とし，単位元をふくみ局所連続対合をもつとする．M を A の任意の極大左イデアルとするとき $\mathfrak{F}_A$ のある端点 F が存在して $I_F = M$ となる．

証明　$H_M = H_A \cap M$ とおき H_M' をつぎのようにおく．

$$H_M' = \{h + \lambda : h \in H_M,\ \lambda \text{ は実数}\}$$

H_M' は H_A の実線型部分空間となる．ここで H_M' の上の関数 F_0 をつぎのように定義する．

$$F_0(h + \lambda) = \lambda \quad (h + \lambda \in H_M')$$

そのとき F_0 は H_M' の上の実線型汎関数で $F_0(1) = 1$．また $h + \lambda \in H_M'$ な

ら $\lambda-(h+\lambda)\in M$ なるゆえ $\lambda\in\sigma(k+\lambda)$ (M の元は正則ではないから). それゆえ $|\lambda|\leqq r(h+\lambda)$ であって

$$|F_0(h+\lambda)|\leqq r(h+\lambda) \qquad (h+\lambda\in H_M').$$

この F_0 を Hahn-Banach の拡張定理により H_A の上の線型作用素 (それを再び F_0 とおく) に拡張し $|F_0(h)|\leqq r(h)$ ($h\in H_A$) とすることができる. その F_0 をさらに A の上に拡張して得られた Hermite 汎関数を F とおく. ここで定理 6·27, 定理 6·28 (iii) より F は正値汎関数となる. 任意の $x\in M$ では $x^*x\in M$ なるゆえ $F(x^*x)=0$ となるから, これは $M\subset I_F$ なることを示す (Schwarz の不等式から). ところが M は極大なるゆえ $M=I_F$ とならなければならない. さていま $\mathfrak{E}=\{F'\in\mathfrak{F}_A : M=I_{F'}\}$ とおけば$\mathfrak{E}$は $\mathfrak{F}_A$ の凸集合で F をふくむ. さらにそれは H_A による弱位相で閉となる. いま $F=\alpha_1F_1+\alpha_2F_2$, $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$, $\alpha_1+\alpha_2=1$, $F_1, F_2\in\mathfrak{F}_A$ とおけば $F(x^*x)=0$ なることから $F_1(x^*x)=0$, $F_2(x^*x)=0$ となるゆえ $M=I_{F_1}=I_{F_2}$ となる. これは F_1, $F_2\in\mathfrak{E}$ なることを示し, その結果Fは $\mathfrak{F}_A$ の端点となる. *qed*

この定理からつぎが導かれる.

定理 6·34 A を対称 Banach *-環で単位元をもち局所連続対合をもつとする. そのときAの *-根基は根基と一致する.

証明 $R^*\supset R$ なることはすでに述べた. ゆえに $R^*\subset R$ を証明すればよい. いま M を A の任意の極大左イデアルとするとき, 前の定理より $\mathfrak{F}_A$ の端点Fが存在して $M=I_F$ となる. ここでRはAの極大左イデアルすべての共通集合 (定理 2·17 (ii)) であり, R^* は $I_F(F\in\mathfrak{F}_A)$ の共通集合なるゆえ $R\supset R^*$ となるわけである. *qed*

さて Banach *-環Aが定理 6·34 の条件のほかに, さらに半単純であるとする. 定理 6·34 よりAの *-根基 R^* は A の根基Rと一致し, またAが半単純なるゆえ $R^*=(0)$ となる. 定理 6·32 より *-根基 R^* はAの Hilbert 空間におけるすべての *-表現の核の共通集合である. 定理 6·22 よりAの Hilbert 空間におけるすべての *-表現 $a\to T_a^{(\lambda)}$ に対して, それらの表現の直和 $a\to T_a$ が定義され, それがまたAのある Hilbert 空間における1つの *-表現となる. しかし $R^*=(0)$ なることから, この *-表現 $a\to T_a$ は忠実であることは明らか. ゆえにつぎの定理をうる.

定理 6・35 Aを対称 Banach *-環で単位元をもち，局所連続対合をもつとする．さらにAが半単純であれば，Aのある Hilbert 空間における忠実な *-表現が存在する．それゆえAはA^*-環となる．

6・6 B^*-環 の 構 造

Banach *-環Aが $\|x^*x\|=\|x\|^2(x\in A)$ を満たすとき，B^*-環といわれることは前にも述べた．もちろんB^*-環はA^*-環であるから半単純環である（定理 6・13）．この節のおもな目的は，任意の複素B^*-環は一つのC^*-環と等長 *-同型なることを証明することである（定理 6・40）．

この節を通して，Aを複素B^*-環とする．まずつぎの定理から始める．

定理 6・36 Aを複素B^*-環とする．そのとき

（i） Aの対合は Hermite 的である．

（ii） Aの任意の元xに対して $\|x\|^2=r(x^*x)$．もしxを正規元とすれば $\|x\|=r(x)$．

（iii） $h\geqq 0,\ k\geqq 0$ なら $h+k\geqq 0$ となる．

証明 （i）および（ii）．xをAの任意の正規元とし，Bをxを含むAの極大可換 *-部分環とする．そのときBは可換B^*-環なるゆえ定理 6・16 よりそれは $C_0(M_B)$ と同一視出来る．定理 1・28 より $\sigma_A(x)=\sigma_B(x)$ なるゆえ，すべての Hermite 元hで $\sigma_A(h)$ は実数となり，また任意の正規元xで $\|x\|=r(x)$ なることが示される．それゆえ任意の元xで $\|x\|^2=\|x^*x\|=r(x^*x)$．(iii) は（ii）から Hermite 元 $h,\ k$ に対して $r(h+k)\leqq r(h)+r(k)$ なることより証明できる（巻末補遺参照）． *qed*

定理 6・37 Bを Banach 環とし，B^*-環Aをその部分環とする．A, B のノルムをおのおの $\|x\|, \|x\|_1$ で表わす．そのとき

（i） Aの任意の正規元xで $\sigma_A(x)\cup(0)=\sigma_B(x)\cup(0)$．

（ii） Aの任意の元xで $\|x\|^2\leqq\|x^*\|_1\|x\|_1$．

（iii） Aの任意の元xで $r_A(x)=r_B(x)$．

証明 （i） xをAの正規元とする．CをxをふくむAの最大可換 *-部分環とすれば $\sigma_A(x)=\sigma_C(x)$．さらに，系 3・48 より $\sigma_C(x)\cup(0)=\sigma_B(x)\cup(0)$．それゆえ $\sigma_A(x)\cup(0)=\sigma_B(x)\cup(0)$．（ii），（i）より任意の正規元$x$で $r_A(x)$

$=r_B(x)$ となるから任意の $x\in A$ で

$$||x||^2=||x^*x||=r_A(x^*x)=r_B(x^*x)\leqq||x^*||_1||x||_1.$$

(iii), (ii) よりすべての n で

$$||x^n||^2\leqq||(x^*)^n||_1||x^n||_1.$$

この両辺の n 乗根をとり $n\to\infty$ とすれば $r_A(x)^2\leqq r_B(x^*)\cdot r_B(x)$. 一方$A$は$B$の部分環なるゆえ, 任意の $x\in A$ に対していつも $r_B(x)\leqq r_A(x)$. それゆえ

$$r_B(x^*)r_B(x)\leqq r_A(x^*)r_A(x)=r_A(x)^2.$$

それゆえ $r_A(x)^2=r_B(x^*)r_B(x)$. これと $r_B(x)\leqq r_A(x)$, $r_B(x^*)\leqq r_A(x^*)=r_A(x)$ から $r_A(x)=r_B(x)$. qed/

定理 6·38 Bを Banach *-環で B^*-環Aをその*-部分環とする. そのときAの任意の元xで $\sigma_A(x)\cup(0)=\sigma_B(x)\cup(0)$. もし$B$が B^*-環であればBはAを等長的にふくむ. すなわちAはBの閉部分環となる.

証明 $\xi(\neq 0)\notin\sigma_A(x)$ は $y=\xi^{-1}x$ がAの中で擬正則なることと同等. また*-環では y が擬正則なることと, $y^*\circ y$, $y\circ y^*$ が擬正則なることとは同等. これと上の定理を考え合わせると前の部分は明らか. 後の部分は上の定理の (iii) と B^*-環では $||x||^2=r(x^*x)$ (定理 6·36 (ii)) が成立することから明らか. qed/

このあと任意の複素 B^*-環は対称環であることと, それはまた一つの C^*-環に等長的 *-同型であることを示す. まずAが B^*-環なるとき $x^*x\leqq 0$ から $x=0$ がでることを示す. 定理 1·13 (iii) より $\sigma_A(x^*x)-(0)=\sigma_A(xx^*)-(0)$. これから $x^*x\leqq 0$ から $xx^*\leqq 0$ がでる. さて任意の元 x を Hermite 元 h, k で分解し $x=h+ik$ とするとき, $x^*x=2h^2+2k^2-xx^*$. $2h^2\geqq 0$, $2k^2\geqq 0$ はもちろんであり (定理 6·36 (i)), 仮定より $-xx^*\geqq 0$. これから $x^*x\geqq 0$ となりその結果 $x^*x=0$ となり $x=0$ (定理 6·36 (ii)).

定理 6·39 任意の複素 B^*-環Aは対称環である.

証明 x^*x は Hermite 元であるから $x^*x=h-k$, $h\geqq 0$, $k\geqq 0$, $hk=kh=0$ とかける*). $z=xk$ とおくと $z^*z=kx^*xk=-k^3$. $k\geqq 0$ から $z^*z\leqq 0$. 上に注意したようにこれから $z=0$ がでる. これはまた $k=0$ なることを示し結局 $x^*x=h\geqq 0$. これはまた$-x^*x$ が擬正則なることを示し. Aは対称環である. qed/

*) $t=x^*x$ をふくむAの極大可換環Cを考えれば定理 6·16 よりCは $C_0(M(C))$ と等長同型となる. この同型写像で $t\to f_t$ とする. いま $f_t^+=\max(f_t, 0)$, $f_t^-=\max(-f_t, 0)$ として $h\to f_t^+$, $k\to f_t^-$ とすれば, $h\geqq 0$, $k\geqq 0$, $t=h-k$, $hk=kh=0$ となる.

定理 6・40　任意の複素 B^*-環は一つの C^*-環と等長 $*$-同型である.

証明　B^*-環Aが単位元をもたないときは，それに単位元を添加して B^*-条件を満たすようにできる（定理 6・8）. もしその環が C^*-環になることが証明できれば，その部分環Aも C^*-環となるからAは始めから単位元をもつとして一般性を失わない. Aは半単純で対称環であるから定理 6・35 よりAの一つの Hilbert 空間における忠実な $*$-表現が存在する. 定理 6・38 よりその表現は等長的となり結局Aは C^*-環となった.　*qed*

注意　定理 6・40 は始め対称環なることを仮定した上で Gelfand and Naǐmark［文献 83)］によって証明された. B^*-環が対称環となることが Fukamiya［文献 85)］, Kelley and Vaught［文献 86)］により確かめられた.

6・7　作用素からなる環の例

A.　コンパクト作用素全体の環 $\mathfrak{F}_C$

Xを Banach 空間とする. Xの上の線型作用素Tがコンパクト（または完全連続）であるとは，TがXの単位球をXの一つのコンパクト集合の中に写すときにいう. これらコンパクト作用素全体の集合 $\mathfrak{F}_C$ は $\mathfrak{B}(X)$ の中で一つのイデアルをなし，有限階数の作用素全体をふくむ. 有限階数全体の集合が $\mathfrak{F}_C$ の中で稠密であるかどうかはまだわからないが，Xが Hilbert 空間の場合にはそのようになることがわかっている. ゆえにこの場合には $\mathfrak{F}_C$ は $\mathfrak{B}(X)$ の極小閉両側イデアルとなっている. さてXを Hilbert 空間 H としたときの $\mathfrak{F}_C$ はそれ自身 C^*-環となる. また $\mathfrak{F}_C$ はつぎのような形の線型作用素の集まりとなる：$\mathfrak{F}_C \ni T$ となる必十条件は $T=\sum_i a_i\varphi_i\otimes\bar{\psi}_i$, ここで $a_i>0$ かつ, $\{\varphi_i\}$ および $\{\psi_i\}$ は H の二つの直交系である. 項が無限にあるときは $\lim a_i=0$ である（Schatten［文献 87), p. 71］).

B.　Schmidt クラス $\mathfrak{F}_S$

Hを Hilbert 空間とする. $\{\varphi_\lambda\}$, $\{\psi_\lambda\}$ をHの元の任意の二つの完全正規直交系 (complete orthonormal system) とする. 任意の $A\in\mathfrak{B}(H)$ に対して，つぎの三つの和を考える.

$$\sum_\lambda \|A\varphi_\lambda\|^2,\quad \sum_{\lambda,\mu}|(A\varphi_\lambda,\psi_\mu)|^2,\quad \sum_\mu \|A^*\psi_\mu\|^2.$$

Parseval の等式（文献①, p. 132）を用いれば

$$\|A\varphi_\lambda\|^2=\sum_\mu|(A\varphi_\lambda,\ \psi_\mu)|^2$$

となるから

$$\sum_\lambda\|A\varphi_\lambda\|^2=\sum_{\lambda,\mu}|(A\varphi_\lambda,\ \psi_\mu)|^2=\sum_{\lambda,\mu}|(A^*\varphi_\mu,\ \psi_\lambda)|^2=\sum_\mu\|A^*\psi_\mu\|^2$$

となり上の三つの和は等しく（$+\infty$ になるかも知れない）なる．$\{\varphi_\lambda\}$, $\{\psi_\lambda\}$ は任意であるから，上の和はHの完全正規直交系のとり方には無関係である．その値の平方根を $\|A\|_S$ とおくことにする．ここで $\|A\|_S<\infty$ となるような $A\in\mathfrak{B}(H)$ を Schmidt クラスの作用素とよぶことにし，その全体を $\mathfrak{F}_S$ と書くことにする．

いま Hilbert 空間Hを $L^2([0,1])$，すなわち閉区間 [0, 1] の上の Lebesgue 可測関数 f で $\int_0^1|f|^2dx<\infty$ となるもの全体の空間とする $\left(\text{そのノルム } \|f\|=\left(\int_0^1|f|^2dx\right)^{1/2}\right)$. そのとき $\mathfrak{F}_S$ はつぎのような $L^2([0,\ 1])$ の上の積分作用素Tの全体と一致する．すなわち

$$Tf(x)=\int_0^1K(x,\ y)f(y)dy\ \ (f\in L^2([0,\ 1])).$$

ここで $K\in L^2(\varDelta)$, $\varDelta=\{(x,\ y):0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1\}$. この証明に関しては Stone［文献 88)］を見られたい．

上のような積分作用素が Schmidt［文献 89)］により研究されたのでその名前がついた．一般の場合において $\mathfrak{B}(H)$ の元Aのノルム $\|A\|_S$ はつぎの条件を満たすことは容易に確かめられる．A, $B\in\mathfrak{B}(H)$ に対して

（i） $\|A^*\|_S=\|A\|_S$.

（ii） $0\leqq\|A\|\leqq\|A\|_S\leqq\infty$.

（iii） αをスカラーとすれば $\|\alpha A\|_S=|\alpha|\|A\|_S$.

（iv） $\|A+B\|_S\leqq\|A\|_S+\|B\|_S$.

（v） $\|AB\|_S\leqq\|A\|_S\|B\|_S$.

（vi） $\|TAU\|_S\leqq\|T\|\ \|A\|_S\|U\|$ $(T,\ U\in\mathfrak{B}(H))$.

（vii） $\|f\otimes g\|_S=\|f\|\ \|g\|=\|f\otimes g\|$ $(f,\ g\in H)$.

このことから $\mathfrak{F}_S$ は $\mathfrak{B}(H)$ の両側 *-イデアルで，任意の有限階数の作用素をふくむことがわかる．さらに $\mathfrak{F}_S$ 自身ノルム $\|A\|_S$ をもつ Banach 環となる．

なんとなれば上の（ii）〜（v）により $\mathfrak{F}_S$ がノルム環となるが，その完備性はつぎのようにして証明できる．$\{A_n\}\subset\mathfrak{F}_S$ がノルム $\|A\|_S$ に関して Cauchy 列だとする．上の性質（ii）より $\{A_n\}$ は $\mathfrak{B}(H)$ の中の元の列と考えて Cauchy 列となる．それゆえに $A_0\in\mathfrak{B}(H)$ が存在して $\|A_n-A_0\|\to 0$. ノルム $\|A\|_S$ の定義から H の任意の完全正規直交系 $\{\varphi_\lambda\}$ で

$$\|A_n\|_S^2=\sum_\lambda\|A_n\varphi_\lambda\|^2 \qquad (n=1,2,\cdots)$$

さて $\{\|A_n\|_S\}$ は有界なるゆえ，n に無関係な定数 α_0 が存在して

$$\sum_\lambda\|A_n\varphi_\lambda\|^2\leq\alpha_0 \qquad (n=1,2,\cdots)$$

π をインデックス λ の任意の有限集合とすれば，当然

$$\sum_{\lambda\in\pi}\|A_n\varphi_\lambda\|^2\leqq\alpha_0 \qquad (n=1,2,\cdots)$$

ここで $n\to\infty$ とすれば

$$\sum_{\lambda\in\pi}\|A_0\varphi_\lambda\|^2\leq\alpha_0$$

これはまた $A_0\in\mathfrak{F}_S$ なることを示している．つぎに任意の σ で

$$\|A\|_\sigma=(\sum_{\lambda\in\sigma}\|A\varphi_\lambda\|^2)^{1/2}$$

とおけば $\|A\|_\sigma\leqq\|A\|_S$ で，かつ任意の m, n で

$$\|A_0-A_n\|_\sigma\leqq\|A_0-A_m\|_\sigma+\|A_m-A_n\|_S$$

任意の $\varepsilon>0$ に対して適当に n_0 を選べば，m, $n\geqq n_0$ に対して $\|A_m-A_n\|_S<\varepsilon$. n を $n\geqq n_0$ に固定し $m\to\infty$ とすれば

$$\|A_0-A_n\|_\sigma\leq\varepsilon \qquad (n\geqq n_0)$$

をうる．ここで σ は任意であるから $\|A_0-A_n\|_S\leqq\varepsilon$ $(n\geqq n_0)$ となり，これは $\mathfrak{F}_S$ が完備なることを証明している．

さて $\{\varphi_\lambda\}$ を H の完全正規直交系としたとき，$A,B\in\mathfrak{F}_S$ に関してつぎのように内積を定義する．

$$(A,B)=\sum_\lambda(A\varphi_\lambda,\ B\varphi_\lambda).$$

そのとき $\|A\|_S^2=(A,\ A)$ となり，この内積で $\mathfrak{F}_S$ は Hilbert 空間となる．$\|A^*\|_S=\|A\|_S$ となることと

$$4(A,\ B)=(\|A+B\|_S^2-\|A-B\|_S^2)+i(\|A+iB\|_S^2-\|A-iB\|_S^2)$$

なる等式から $(A^*,\ B^*)=\overline{(A,\ B)}$ が導かれる．このことがらと $(A,\ B)$ の定

義とによりつぎが成立する．$\mathfrak{F}_S$ の任意の A, B, C に対して

$$(A, CB^*)=(AB, C)=(B, A^*C)$$

これは $\mathfrak{F}_S$ が H^*-環*) であることを示す．上の式の前の部分はつぎのようにして証明できる：$\overline{(A, CB^*)}=(A^*, BC^*)=\sum_\lambda(A^*\varphi_\lambda, BC^*\varphi_\lambda)=\sum_\lambda(B^*A^*\varphi_\lambda, C^*\varphi_\lambda)$ $=(B^*A^*, C^*)=\overline{(AB, C)}$．後の部分も同様に証明できる．

注意 Schatten は $||f\otimes g||=||f||\cdot||g||(f, g\in H)$ となるようなノルム $||f||$ をクロスノルム (crossnorm) とよんだが，ノルム $||A||_S$ はクロスノルムになっている．

C. トレース・クラス $\mathfrak{F}_T$

Hilbert 空間Hの上の線型作用素Tで Schmidt クラス $\mathfrak{F}_S$ に属する A_i, B_i で $T=\sum_{i=1}^n A_iB_i$ の形となる全体の集合をトレース・クラス $\mathfrak{F}_T$ とよぶ．$\mathfrak{F}_T$ は $\mathfrak{B}(H)$ の両側*-イデアルであり，$\mathfrak{F}_S$ にふくまれ任意の有限階数の作用素をふくむことは明らかである．$\{\varphi_\lambda\}$ を H の一つの完全正規直交系とするとき，$T=\sum_{i=1}^n A_iB_i(A_i, B_i\in\mathfrak{F}_S)$ のとき (B_i, A_i^*) を $\mathfrak{F}_S$ における内積とすれば容易に

$$\sum_\lambda(T\varphi_\lambda, \varphi_\lambda)=\sum_{i=1}^n(B_i, A_i^*)$$

が証明できるが，この値を $\tau(T)$ とおくことにする．そのとき $A, B\in\mathfrak{F}_S$, S, $T\in\mathfrak{F}_T$ に対して

(i) $\tau(AB)=\tau(BA)$.

(ii) $\tau(T^*)=\overline{\tau(T)}$.

(iii) αをスカラーとすれば，$\tau(\alpha T)=\alpha\tau(T)$.

(iv) $\tau(S+T)=\tau(S)+\tau(T)$.

(v) $\tau(f\otimes g)=(f, g)$ $(f, g\in H)$.

トレース・クラス $\mathfrak{F}_T$ につぎのようなノルムを入れれば，Banach *-環となりつぎの4つの性質をもつ．

$$||S||_T=\tau((S^*S)^{1/2}),\quad S\in\mathfrak{F}_T.$$

(1) $||S||\leqq||S||_T=||S^*||_T$, $(S\in\mathfrak{F}_T)$.

(2) $||AS||_T\leqq||A||\,||S||_T$, $(A\in\mathfrak{B}(H),\ S\in\mathfrak{F}_T)$.

---

*) Aが H^*-環とは，Aは複素 Hilbert 空間で同時に $||x||=(x, x)^{1/2}$ で Banach 環をなし，かつ任意の $a\in A$ に対して，aの adjoint とよばれる $a^*\in A$ が存在し，$(ax, y)=(x, a^*y)$, $(xa, y)=(x, ya^*)$ $(x, y\in A)$ を満たすものをいう．

（3）　$\tau(S) \leqq ||S||_T$,（$S \in \mathfrak{F}_T$).

（4）　$||f \otimes g||_T = ||f||\,||g|| = ||f \otimes g||$,（$f$, $g \in H$).

注意　Schatten はつぎのことを示した：$\mathfrak{F}_T$ は $\mathfrak{F}_S$ の共役空間である．すなわち $\mathfrak{F}_T = \mathfrak{F}_S'$．また $\mathfrak{B}(H) = \mathfrak{F}_T'$ である．その結果 $\mathfrak{B}(H) = \mathfrak{F}_S'' = (\mathfrak{F}_S')'$ となっている．$\mathfrak{F}_S$, $\mathfrak{F}_T$ などのくわしい理論は Schatten［文献 89)］を見られたい．またこれらは位相的テンソル積の理論として発展していく（たとえば Grothendieck［文献 90), 91)］.

補　　遺

文中で説明が足りなかった個所，また「参考文献」にのせなかった書物や論文で，本書を読む際参考になるもの，および原稿を書き終えた後に出版された書物や論文で，本書に関係のあるもののいくつかを列挙し，説明を加える．

（Ⅰ）　証明などの補足

（1）（p. 32）表現 $a \to T_a$ がサイクリックまたは既約であるとは $\mathfrak{B} = \{T_a;\ a \in A\}$ がサイクリックまたは既約であることと定義する．

（2）（p. 41）系 2·25 の証明：Aが原始環なるゆえ（閉）極大左イデアル M で $M:A=(0)$．ゆえに表現 $a \to A_a^{A/M}$ は忠実となる．ここで $X=A/M$, $\mathfrak{B}=\{A_a^{A/M};a\in A\}$，$\|A_a^{A/M}\|=\|a\|$ とおけばよい．

（3）（p. 95）定理 4·2 での $L_1=\phi x$ の証明：$\{\phi(y);\ y\in Y\}$ の *-弱閉包を $\mathfrak{K}$ とする．そのとき $K(M)$ の端点 L_1 は $\mathfrak{K}$ にふくまれる［文献 35) p. 9 参照］．さて L_1 を $\{\phi(y_\lambda)\}$ の *-弱収束点とすれば，$\{y_\lambda\}\subset Y$ でかつYがコンパクトなるゆえ，$\{y_\lambda\}$ の部分列 $\{y_{\lambda'}\}$ がある $x\in Y$ に収束する．その結果 $L_1=\varphi x$.

（4）（p. 148）$P=\infty$ のときも $H^\infty \ni f$ に対して $\tilde{f}(\theta)=\lim_{r\to1} f(re^{i\theta})$ が $a.e.\ \theta$ に存在し，$\|\tilde{f}\|_\infty<\infty$となる．$H^\infty$ は$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta}f(e^{i\theta})d\theta=0\ (n=1,2,3,\cdots)$ となる L^∞ 関数f（単位円周上の）全体と考えてよい［Rudin 39) p. 234 参照］．

（5）（p. 169）定理 5·21：$f\in J$ に対して，その内部部分，外部部分を f_1, f_2 とし，$Z=\{t;\ f(e^{it})=0\}$ とする．$f_1=BS$ と分解したとき（定理 5·18）Bの 0 点の収束点はZにふくまれ，またSによってきまる特異測度の台もZにふくまれる．それゆえ $f_1=BS$ は Γ-Z の点（Γは単位円）で解析的で 0 とならない．そして f_2 はZの上で 0 であるから $f_2\in kZ$. f_1/F は Γ-Z の点で解析的であるゆえ $f/F=(f_1/F)\cdot f_2\in kK$.

（6） (p. 207) 定理 6·36 (iii)：A が単位元をもつと仮定してよい．$\varepsilon>0$ に対して $\eta>0$ を適当に選び，$a=\eta^{-1}(h+\varepsilon)$，$b=\eta^{-1}(k+\varepsilon)$ としたとき $r(a)<1$，$r(b)<1$ とできる．ここで $0<\sigma(a)<1$，$0<\sigma(b)<1$ となるから，また $r(1-a)<1$，$r(1-b)<1$．それゆえ $r(1-2^{-1}(a+b))\leqq 2^{-1}[r(1-a)+r(1-b)]<1$．これから $\sigma(2^{-1}(a+b))>0$．｜何となれば $r(1-2^{-1}(a+b))=\max\{|1-\xi|;\ \xi\in\sigma(2^{-1}(a+b))\}$ となるから．ゆえに $\sigma(h+k)>-2\varepsilon$．$\varepsilon$ 任意なるゆえ $\sigma(h+k)\geqq 0$.

(II) 参考文献（書物）の補足

（1） 三村征雄：位相解析，現代数学講座 12-B（共立出版）1957.

Banach 空間．Hilbert 空間．Banach 環などの諸性質について述べてある．また von Neumann 環，調和解析などについてもわかりやすく記してある．

（2） 中村正弘：関数解析入門（槇書店）1968.

Banach 空間，Banach 環，スペクトル解析などについて，わかりやすく述べてある．

（3） 功力金二郎，井関清志，笠原章郎：関数解析入門Ｉ，Ⅱ（共立全書）.

これは Naĭmark の書物の翻訳である．本書の中でも参照した．

（4） K. Yosida : Functional analysis, Springer (1965).

ノルム空間，局所凸線型位相空間，半群の理論，コンパクト作用素，ノルム環，エルゴート理論などについてくわしく述べてある．

（5） 河田敬義，三村征雄：現代数学概論Ⅱ（岩波書店）.

位相空間，ノルム空間，測度，Lebesgue 測度などについてくわしく述べてある．

関数環に関するものとしては

（6） J. Wermer : Seminar über Funktionen-Algebren, Lecture Notes in Mathematics, Springer (1964).

（7） Function algebras, Proc. of Tulane Univ., Symposium, Scott Foresman (1966).

（8） G. Lumer : Algèbres de fonctions et espaces de Hardy, Lecture Notes in Mathematics, Springer (1968).

そのほかに，近く A. Browder の Lecture note が出版されるはずである．

(III)　参考文献（論文）の補足

（1）　H. Ishikawa, J. Tomiyama and J. Wada : On the essential set of function algebras, *Proc. Japan Acad.*, 44 (1968) 1000～1002.

本質集合と補間集合との関係を述べたもの.

（2）　H. S. Bear and M. L. Weiss : An intrinsic metric for parts, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 18 (1967) 812～817.

Gleason 部分は元来，関数環の極大イデアル空間の部分集合として定義されたが，その後その概念が拡張され，ノルム空間Eの共役空間 E' の単位球の上で，さらにこの論文ではノルム空間の凸集合の上で定義された.

（3）　H. S. Bear and B. Walsh : Integral kernel for one-part function spaces, *Pacific J. Math.*, 23 (1967) 209～215.

実連続関数がつくる線型空間の場合の Gleason 部分の同値関係が Harnack の不等式の形をとっていることから（定理 4·19 の証明参照），ポテンシャル論との関係が論じられる．これに関連した論文をいくつか挙げると

H. S. Bear : An abstract potential theory with continuous kernel, *Pacific J. Math.*, 14 (1964) 407～420.

H. S. Bear and A. M. Gleason : A global integral representation for abstract harmonic functions, *J. Math. Mech.*, 16 (1967) 639～653.

P. A. Loeb and B. Walsh : The equivalence of Harnack's principal and Harnack's inequality in the axiomatic system of Brelot, *Ann. Inst. Fourier*, 15 (1965) 597～600.

B. Walsh and P. A. Loeb : Nuclearity in axiomatic potential theory, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72 (1966) 685～689.

D. Hinrichsen : Randintegrale und nukleare Funktionenräume, *Ann. Inst. Fourier*, 17 (1967) 225～271.

（4）　B. V. O'Neill : Parts and one-dimensional analytic spaces, *Amer. J. Math.*, 90 (1968) 84～97.

Gleason 部分の構造については Dirichlet 環における Wermer の定理［定理 4·20］，同じく hypo-Dirichlet 環における Wermer の研究［文献 52)］があるが，この hypo-Dirichlet 環の場合は上の O'Neill によって完全に解決

された.

(5) M. Hasumi: Interpolation sets for logmodular Banach algebras, *Osaka J. Math.*, 3 (1966) 303〜311.

ログモジュラー環における補間集合についての研究

(6) C. E. Rickart: Holomorphic convexity for general function algebras, *Can. J. Math.*, 20 (1968) 272〜290.

多変数関数論における解析関数の拡張になっている A-解析関数に関する研究 (p. 143 参照).

(7) I. Glicksberg: Dominant representation measures and rational approximation, *Trans. Amer. Math.*, (1968) 425〜462.

F. and M. Riesz の定理の Ahern による拡張定理 [p. 159,「注意」参照] から出発し，それから得られる一連の定理，およびそれの有理関数による一様近似の問題への応用.

(8) T. S. Srinivasan and Ju-kwei Wang: On closed ideals of analytic functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 16 (1965) 49〜52.

ディスク環の閉イデアルの形の決定を，シフト不変部分空間の見地から考えたもの.

(9) P. R. Ahern and D. Sarason: The H^P spaces of function algebras, *Acta Math.* 117 (1967) 123〜163.

Hypo-Dirichlet 環 (もっと弱い条件で) における Hardy クラス H^P についての理論.

参 考 文 献

① 吉田耕作，河田敬義，岩村 聯：位相解析の基礎，岩波書店 (1960)

② 竹之内脩：函数解析，朝倉書店 (1968)

③ 吉田耕作：位相解析Ⅰ，岩波書店 (1951)

④ N. Dunford and J.T. Schwartz, Linear operators I, New York (1964).

⑤ R. E. Edwards : Functional analysis, Theory and applications, New York (1965).

⑥ C. E. Rickart : General theory of Banach algebras, Van Nostrand (1960).

⑦ N. Jacobson : Structure of rings, Amer. Math. Soc. Colloq Publ. 37 (1956).

⑧ K. Hoffman : Banach spaces of analytic functions, Prentice-Hall (1962).

1) M. Nagumo : Einige analytische Untersuchungen in linearen metrischen Ringen, Japan J. Math. 13 (1936), 61–80.

2) I. Kaplansky : Topological rings, Amer. J. Math., 69 (1947), 153–183.

3) N. Jacobson : The radical and semi-simplicity for arbitrary rings, Amer. J. Math., 67 (1945), 300–320.

4) G. Šilov : On the extension of maximal ideals, Dokl. Akad. Nauk S. S. S. R. 29 (1940), 83–84.

5) I. M. Gelfand, D. A. Raikov, and G. E. Shilov : Commutative normed rings, Chelsea (1964).

6) C. E. Rickart : The singular elements of a Banach algebra, Duke Math. J. 14 (1947), 1063–1077.

7) E. Hille : Functional analysis and semi-groups, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 31, New York (1948).

8) E. Hille and R. S. Phillips : Functional analysis and semi-groups, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 31, Providence (1957).

9) J. K. Wang : Banach algebras, Yale University, Lecture note (1965).

10) S. Mazur : Sur les anneaux linéaires, C. R. Acad. Sci. Paris 207 (1938), 1025–1027.

11) I. M. Gelfand : Normierte Ringe, Mat. Sbornik 9 (1941), 3–24.

12) S. Kametani : An elementary proof of the fundamental theorem of normed fields, J. Math. Soc. Japan 4 (1952), 96–99.

13) C. E. Rickart : An elementary proof of a fundemental theorem in the theory of Banach algebras, Mich. Math. J. 5 (1958), 75–78.

14) C. E. Rickart : The uniqueness of norme problem in Banach algebras, Ann. of Math. 51 (1950), 615–628.

15) B. Yood : Additive groups and linear manifolds of transformations between Banach spaces, Amer. J. Math. 71 (1949), 663–677.

16) M. Eidelheit : On isomorphisms of rings of linear operators, Studia Math. 9 (1940), 97–104.

17) Y. Kawada : Üder der Operatorenring Banachscher Räume, Proc. Inp. Acad. Tokyo 19 (1943), 616–621.

18) S. Kakutani and G. W. Mackey : Two characterizations of real Hilbert space, Ann. of Math. 45 (1944), 50–58.

19) S. Kakutani and G. W. Mackey : Ring and lattice characterizations of Complex Hilbert space. Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), 727–733.

20) N. Jacobson : A topology for the set of primitive ideals in an arbitrary ring, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 31 (1945), 333–338.

21) I. M. Gelfand and G. E. Šilov : Über verschiedene Methoden der Einfuhrung der Topologie in die Menge der maximalen Ideale eines normierte Ringen, Mat. Sbornik 9 (1941), 25–39.

22) B. E. Johnson : The uniqueness of the (complete) norm topology, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 537–539.

23) M. H. Stone : Application of the theory of Boolean rings to general topology, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), 375–481.

24) E. Čech : On bicompact spaces, Ann of Math. 38 (1937), 823–844.

25) M. H. Stone : The generalized Weierstrass approximation theorem, Math. Mag. 21 (1948), 167–184, 237–254.

26) R. Arens and A. Calderon : Analytic functions of several Banach algebra elements, Ann. of Math., 62 (1955), 204–216.

27) I. M. Gelfand : On subrings of the ring of continuons functions, Uspehi. Mat. Nauk (N. S.) 12 (1957), No. 1 (73), 249–251.

28) G. Šilov : On normed rings possessing one generator, Mat. Sbornik 21 (1947), 25–47.

29) G. Šilov : On decomposition of a commutative normed ring in a direct sum of ideals, Mat. Sbornik 32 (1954), 353–364; Amer. Math. Soc. Transl. 1 (1955), 37–48.

30) B. A. Fuks : Theory of analytic functions of several complex variables, Tokyo Univ. International Edition 8 (1963).

31) I. Kaplansky : Normed algebras, Duke Marh. J. 16 (1949), 399–418.

32) R. Arens and I. M. Singer : Function values as boundary integrals, Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954), 735–745.

33) H. S. Bear : The Silov boundary for a linear space of continuous functions, Amer. Math. Monthly 68 (1961), 483–485.

34) E. Bishop and K. de Leeuw : The representation of linear functionals by measures on sets of extreme points, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 9 (1959), 305–331.

35) R. R. Phelps : Lectures on Choquet's theorem, Van Nostrand, Princeton (1966).
36) H. Helson and F. Quigley : Maximal algebras of continuous functions, Proc. Amer. Math. Soc., 8 (1957), 111–114.
37) J. Wermer : On algebras of continuous functions, Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), 866–869.
38) S. Mergelyan : On the representation of functions by series of polynomials on closed sets. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 1, No. 85 (1962), 287–293.
39) W. Rudin : Real and complex analysis, McGraw-Hill (1966).
40) K. Hoffmar : Analytic functions and logmodular Banach algebras, Acta. Math. 108 (1962), 271–317.
41) H. S. Bear : Complex function algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 90 (1959), 383–393.
42) K. Hoffman and I. M. Singer : Maximal algebras of continuous functions, Acta Math. 103 (1960), 218–241.
43) G. E. Šilov : On rings of functions with uniform convergence, Ukrain. Mat. Z. 3 (1951), 404–411.
44) E. Bishop : A generalization of the Stone-Weierstrass theorem, Pacific J. Math., 11 (1961), 777–783.
45) I. Glicksberg : Measures orthogonal to algebras and sets of antisymmetry, Trans. Amer. Math. Soc., 105 (1962), 415–435.
46) J. Tomiyama : Some remarks on antisymmetric decompositions of function algebras, Tôhoku Math. J., 16 (1964), 340–344.
47) A. M. Gleason : Function algebras, Seminars on Analytic functions Vol. 2, 213–226. Institute for Advanced Study, Princeton N. J. (1957).
48) H. S. Bear : A geometric characterization of Gleason parts, Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), 407–412.
49) H. Helson and D. Lowdenslager : Predication theory and Fourier series in several variables, Acta Math., 99 (1958), 165–202.
50) J. Wermer : Dirichlet algebras, Duke J. Math., 27 (1960), 373–382.
51) 遠木幸成：函数論，基礎数学講座 9（共立出版）.
52) J. Wermer : Analytic disks in maximal ideal spaces, Amer. J. Math. Vol. 86 (1964), 161–170.
53) J. Garnett : Disconnected Gleason parts; Bull. Amer. Math. Soc., 72 (1966), 490–492.
54) J. Garnett : A topological characterization of Gleason parts, Pacific J. Math., 20 (1967), 59–63.
55) P. Fatou : Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Math., 30, (1906), 335–400.
56) W. Rudin : Boundary values of continuous analytic functions, Proc. Amer.

Math. Soc., 7 (1956), 808–811.

57) Y. Katznelson : A characterization of the algebra of all continuous functions on a compact Hausdorff space, Bull. Amer. Math. Soc., 66 (1960), 313–315.

58) I. Glicksberg : Function algebras with closed restrictions, Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963), 158–161.

59) J. Wada : On the Šilov boundaries of function algebras, Proc. Japan Acad., 39 (1963), 425–428.

60) J. K. Wang : Multipliers of commutative Banach algebras, Pacific J. Math. 11 (1961), 1131–1149.

61) R. C. Buck : Bounded continuous functions on a locally compact space, Mich. Math. J., 5 (1958), 95–104.

62) J. Wells : Multipliers of ideals in function algebras, Duke Math. J., 31 (1964), 703–709.

63) J. Wada : A note on multipliers of ideals in function algebras, Proc. Japan Acad., 42 (1966), 1134–1138.

64) H. Rossi : The local maximum modulus principle, Ann. of Math., 72 (1960), 1–11.

65) C. E. Rickart : The maximal ideal space of functions locally approximable in a function algebra, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 1320–1326.

66) Eva Kallin : A non-local function algebra, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 49 (1963), 821–824.

67) G. Stolzenberg : The maximal ideal space of the functions locally in a function algebra, Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963), 342–345.

68) C. E. Rickart : Analytic phenomena in general function algelras, Pacific J. Math., 18 (1966), 361–377.

69) 河田敬義：積分論 (共立全書 139).

70) H. Helson : On a theorem of F. and M. Riesz, Colloq. Math., 3 (1955).

71) G. Szegö : Beiträge zur Theorie der toeplitzen Formen (Ersten Mitteilung), Math. Zeit, 6 (1920), 167–202.

72) 一松 信：函数論入門，培風館

73) P. R. Ahern : On the generalized F. and M. Riesz theorem, Pacific J. Math., 15 (1965), 373–376.

74) I. Glicksberg : The abstract F. and M. Riesz theorem, J. Functional Analysis 1 (1967), 109–122.

75) 高木貞治：解析概論，岩波書店

76) W. Rudin : The closed ideals in an algebra of continuous functions, Can. J. Math., 9 (1957). 426–434.

77) A. Beurling : On two problems concerning linear transformations in Hilbert space, Acta Math., 81 (1949), 239–255.

78) P. Lax : Translation invariant subspaces, Acta Math., 101 (1959), 163–178.
79) H. Helson and D. Lowdenslager : Invariant subspaces, Proc. Intern. Symp. on Linear spaces at Jerusalem, (1961), 251–262.
80) M. Hasumi and T. P. Srinivasan : Invariant subspaces of continuous functions, Can. J. Math., 17 (1965), 643–651.
81) M. Hasumi : Invariant subspace theorems for finite Riemann surfaces, Can. J. Math., 18 (1966), 240–255.
82) 荷見守助 : Shift-invariant subspace について, 数学 (岩波書店), 17 巻 4 号 (1966).
83) I. M. Gelfand and M. A. Naĭmark : On the embedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space, Mat. Sbornik 12 (1943), 197–213.
84) J. A. Schatz : Representation of Banach algebras with an involution, Can. J. Math., 9 (1957), 435–442.
85) M. Fukamiya : On a theorem of Gelfand and Neumark and the B*–algebra, Kumamoto J. Sci. Ser A. 1, no. 1 (1952), 17–22.
86) J. L. Kelley and R. L. Vaught : The Positive cone in Banach algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 74 (1953), 44–45.
87) R. Schatten : The theory of cross–spaces, Ann. Math. Stud. 26 (1950).
88) M. H. Stone : Linear transformations in Hilbert space, Amer. Math. Colloq. Publ. 15, New York (1932).
89) E. Schmidt : Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener, Math. Ann. 63 (1907), 433–476.
90) A. Grothendieck : Résumé de la théorie métriques des produits tensoriels topologiques, Bol. Soc. Mat. São Paulo 8 (1953), 1–79 (1956).
91) A. Grothendieck : Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. Amer. Math. Soc., (1955).

索　　引

一ア 行一

一カ 行一

—サ 行—

—タ 行—

—ナ 行—

—ハ 行—

—マ 行—

—ヤ 行—

—ラ 行—

Memorandum

Memorandum

—— 著者紹介 ——

最終学歴　1952 年，大阪大学理学部卒
専　　攻　位相解析
現　　在　早稲田大学教授・理学博士

共立講座 現代の数学 19　ノルム環

定価　1,200 円

版権所有 共立出版株式会社

昭和 44 年 6 月 20 日　初版 1 刷発行

著　者　和田淳蔵（わだ じゅんぞう）

発行者　南條初五郎
東京都文京区小日向 4 丁目 6 番19号

印刷者　岩永吉光
東京都新宿区市ヶ谷本村町27

NDC. 415.5

発行所　東京都文京区小日向 4 丁目 6 番19号
電話 東京 947 局 2511 番（代表）
郵便番号 112　振替口座 東京 57035
共立出版株式会社

印刷・新日本印刷　製本・菊地製本

Printed in Japan

社団法人
自然科学書協会
会　員